Výfučtení: Mocniny a kvadratické rovnice

S čísly a základními operacemi, tedy se sčítáním, odčítáním, násobením a dělením, jsme se seznámili už dávno během prvních let naší školní docházky. Každý z nás samozřejmě ví, že $2 \cdot 2 = 4$ nebo $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Jenže lidem (zejména pak vědcům) takto jednoduchý svět nestačí. A tak naši předkové vnesli do matematiky pár nápadů, až se nakonec původně celkem přehledná čísla proměnila ve zdánlivě nesmyslné obrazce. Jak však po přečtení celého Výfučtení uvidíme, jedná se vskutku jen o zdánlivou nesmyslnost.

Písmena místo čísel

Písmena (neboli neznámé) místo čísel si zavedli lidé, aby mohli popsat matematicky obecně platné vztahy. Zavedení neznámých se nejlépe demonstruje na příkladu. *Honza sní pokaždé dvakrát tolik bonbonů než jeho mladší bratr Petr.* Tuto skutečnost lze snadno vyjádřit nezávisle na konkrétním počtu bonbonů: $h = 2p$, kde h značí počet bonbonů snědených Honzou a p snědených Petrem. *Jejich mladší sestra Anička sní bonbonů třetinu oproti Petrovi.* Toto tvrzení opět můžeme vyjádřit obecně: $a = p/3$. Snadno nyní odvodíme, kolikrát více bonbonů sní nejstarší Honza: $h = 2p = 2 \cdot 3a = 6a$, tedy šestkrát více než Anička.

Mocniny s přirozeným exponentem

Nyní přistoupíme k zavedení nové ideje – mocnin. Co nás k tomu vede? Představme si, že bychom dostali za úkol vypočítat objem krychle o délce hrany 10 m. Její objem získáme jako součin délek všech tří hran

$$V = 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} = 1\,000\,\mathrm{m}^3\,.$$

Určitě dá každý člověk za pravdu, že takový zápis je poněkud roztahaný. Přitom alternativa

$$V = (10\,\mathrm{m})^3 = 10^3\,\mathrm{m}^3$$

vypadá mnohem elegantněji.

Jak příklad napovídá, mocniny nám slouží pro usnadnění zápisu součinu. Důležitými pojmy jsou *mocninný základ* a *exponent*. Tedy například mocnina o základu 3 a exponentu 4 je číslo 3^4, čteme tři na čtvrtou. Číslo $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ čteme čtyři na třetí. Lze vymyslet i něco složitějšího, třeba $7{,}35^2 = 7{,}35 \cdot 7{,}35$.

Mocninný základ (a také exponent) může být tedy jakékoliv číslo. A stejně jako čísla, v mocninách se mohou vyskytovat i neznámé, třeba a^5 nebo 4^n.

Mocniny se záporným celým exponentem

Jak máme chápat výrazy 4^{-1} nebo a^{-2}? Víme, že kladný exponent vyjadřuje, kolikrát daný základ umocníme. Zvýšení exponentu o jedna znamenalo další násobení základem. Podíváme-li se na to obráceně, snížení exponentu o jedna by mělo znamenat o jedno násobení méně, tedy vlastně dělení základem. Záporný exponent tedy znamená, že číslo se vyskytuje v dané mocnině, ale pod zlomkovou čarou.

Zkusme si vzpomenout, jestli jsme už někde podobný nápad neviděli. A viděli. Jednotky fyzikálních veličin mají samozřejmě každá svůj rozměr, který lze zapsat dvěma způsoby: například jednotka hustoty $\mathrm{kg/m^3} = \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Odmocniny

Každá nám známá operace s čísly má i svou opačnou: sčítání a odčítání, násobení a dělení. Ani mocnění se nevyhýbá tomuto pravidlu: jeho opakem je odmocňování. Platí

$$\sqrt[b]{a} = c \quad \Leftrightarrow \quad c^b = a\,.$$

Odmocnina tedy hledá takové číslo, aby po jeho umocnění číslem, které je uvedené vlevo nahoře u odmocniny, jsme získali číslo rovné tomu pod odmocninou. Má-li být na místě b dvojka, není nutné ji tam psát, tedy $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$, a hovoříme o druhé odmocnině (čísla 4).

Spojení mocnin a odmocnin

Umocňování a odmocňování se podobá sčítání a odčítání nebo násobení a dělení také v tom, že jedno můžeme vyjádřit pomocí druhého. Odčítání můžeme chápat jako přičítání opačného čísla

$$7 - 5 = 7 + (-5)\,, \qquad a - b = a + (-b)\,,$$

dělení jako násobení převráceným číslem

$$\frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5}\,, \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}\,.$$

Stejně je to i s odmocňováním. Zapisujeme ho též jako umocňování na převrácené číslo

$$\sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}\,, \qquad \sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}\,.$$

Pokud je v exponentu nějaký zlomek, čitatel toho zlomku nám říká, na kolikátou dané číslo umocníme. Jmenovatel zase udává, pod kolikátou odmocninu se toto číslo nachází.

$4^{\frac{3}{2}}$ znamená umocněte číslo čtyři na třetí a poté najděte jeho druhou odmocninu. Anebo v opačném pořadí, najděte druhou odmocninu čísla čtyři a potom ho umocněte na třetí. Tedy: $4^3 = 64$ a $\sqrt{64} = 8$, nebo $\sqrt{4} = 2$ a $2^3 = 8$. Na pořadí operací tedy nezáleží, vždy dostaneme stejný výsledek.

Operace s exponenty

Mocniny mají dvě užitečné vlastnosti:

- V případě součinu dvou stejných základů lze exponenty sečíst: $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$. V případě podílu je odečítáme: $a^5/a^4 = a^{5-4} = a^1 = a$.
- Podobně můžeme sdružovat základy, jedná-li se o stejný exponent: $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$. A stejně i pro podíl: $a^4/b^4 = (a/b)^4$.
- Výraz $a^2 \cdot b^3$ ale nelze upravit, poněvadž základy i exponenty se liší!

Mocniny v rovnici – kvadratická rovnice

Mocniny se nám také mohou dostat do rovnice, uvedeme si proto, jak si poradit s těmi nejjednoduššími případy. Pokud máme druhou mocninu neznámé v rovnici, nazýváme ji kvadratickou rovnicí. Každá taková rovnice může mít žádné, jedno, nebo dokonce dvě řešení.

Nejjednodušší kvadratická rovnice má zápis $y = x^2$, kde x je neznámá a y je reálné číslo. Celou rovnici můžeme odmocnit, ale musíme zvážit, že druhá mocnina může vzniknout z kladného i záporného čísla ($2^2 = (-2)^2 = 4$). Proto po odmocnění dostáváme již zmíněná dvě řešení

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{y}\,.$$

Jelikož neumíme odmocňovat záporná čísla, nesmí být y záporné. Pokud by taková situace nastala, nemá pro nás rovnice žádné řešení.

Nyní si zápis rovnice lehce ztížíme a neznámou vynásobíme číslem a, tedy $y = ax^2$. Chceme-li získat výsledek, musíme neznámou osamostatnit. Proto rovnici číslem a vydělíme. Dostáváme

$$\frac{y}{a} = x^2\,.$$

Nyní již postupujeme známým způsobem a rovnici odmocníme

$$\sqrt{\frac{y}{a}} = \pm\sqrt{x^2} = \pm x\,,$$
$$x_1 = +\sqrt{y/a}\,, \qquad x_2 = -\sqrt{y/a}\,.$$

Opět musíme dát pozor, zda pod odmocninou nemáme záporné číslo.

Na příkladu si ukážeme, že do tohoto tvaru lze rovnici upravit, i když tak zprvu nevypadá. Řešme rovnici $55 = 2x^2 + 5$. Rovnici nejdříve upravujeme do obecného tvaru popsaného výše. Po odečtení čísla 5 a vydělením obou stran rovnice číslem 2 máme (ověřte)

$$25 = x^2\,,$$
$$\sqrt{25} = \pm\sqrt{x^2}\,,$$
$$5 = \pm x\,.$$

Dostáváme tedy dvě řešení, a sice $x_1 = 5$ a $x_2 = -5$.

I když se to nezdá, kvadratická rovnice může být ještě složitější. V úplně nejobecnějším případě lze každou kvadratickou rovnici převést do základního tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Zde je x opět neznámá a a, b i c jsou reálná čísla.

Postupů, jak tuto rovnici vyřešit je několik. My si ukážeme ten nejpraktičtější, a to pomocí snadno zapamatovatelného vzorce. První výraz, se kterým se setkáme, nazýváme *diskriminant* a značíme jej D

$$D = b^2 - 4ac\,.$$

Celý vzorec vypadá následovně:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Ve vzorci vidíme, že kvadratická rovnice má obecně dvě řešení x_1 a x_2, které se od sebe liší pouze ve znaménku před $\sqrt{D}$.[1] Pamatujeme-li si tento vzorec, řešit kvadratické rovnice je hračka. Stačí rovnici upravit do základního tvaru a určit, hodnoty konstant a, b a c.

Ve vzorečku se ale skrývá jedna záludnost. Jak již víme z předchozích příkladů, tak pokud by byl diskriminant záporný, vzoreček přestane fungovat, což znamená, že rovnice nemá žádné řešení. Pokud bude kladný, bude mít rovnice řešení dvě. A kdyby byl nula, platí $\pm\sqrt{0} = 0$, tedy bude nám vycházet jenom jedno řešení.

Pojďme si tyto tři případy ukázat v praxi:

a) Řešme rovnici $8x^2 + 7x + 9 = 0$. Vypočteme-li diskriminant, dostaneme $D = 7^2 - 4 \cdot 8 \cdot 9 = 49 - 288 = -239$. Diskriminant nám vychází záporný, proto už dále nepočítáme a prohlásíme, že rovnice nemá řešení.

b) Řešme rovnici $4x^2 + 5x + 1 = 0$. Vychází $D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$. Diskriminant je kladný, takže pokračujeme v počítání

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4}\,,$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8}\,,$$

$$x_1 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}\,, \quad x_2 = \frac{-8}{8} = -1\,.$$

Získali jsme tedy dvě řešení: mínus jednu čtvrtinu a mínus jedna.

c) Řešme rovnici

$$4\frac{3}{4} = x^2 + x + 5\,.$$

Po úpravě na základní tvar dostáváme $x^2 + x + 1/4 = 0$. Tedy

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0\,.$$

Diskriminant vychází nula, proto bude mít rovnice jen jedno řešení

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Ještě jsme se nesetkali s rovnicí ve tvaru $-x^2 + 5x = 0$. Po dosazení do vzorce dostaneme dvě řešení, z nichž jedno je $x_1 = 0$ a druhé je $x_2 = 5$. Tento typ kvadratické rovnice můžeme řešit ještě jiným způsobem, a to tak, že si vytkneme x. Dostáváme rovnici

$$-x^2 + 5x = 0 = x\left(-x + 5\right)\,.$$

Nyní máme rovnici v tzv. součinovém tvaru. Násobením dvou členů na pravé straně můžeme nuly dosáhnout pouze tak, že alespoň jedno z čísel, která mezi sebou násobíme, bude 0. Tedy nulou musí být buď x nebo závorka $(-x + 5)$. Prvním řešením je proto vždy $x_1 = 0$. Druhé řešení vypočítáme pomocí lineární rovnice

$$-x_2 + 5 = 0\,, \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5\,.$$

[1] Pokud vás zajímá, odkud tento vzorec plyne, napište nám mail anebo se zeptejte přímo na táboře či na Jarním setkání, které pro vás připravujeme.

Vidíme, že oběma způsoby dostaneme tentýž výsledek. Je tedy pouze na nás, který použijeme.