

Úloha II.C ... Přesné výsledky

9 bodů; průměr 6,78; řešilo 37 studentů

1. Účastníci na letním táboře Výfuku měli za úlohu změřit tíhové zrychlení pomocí kyvadla. Změřili délku kyvadla l a jeho periodu T , tíhové zrychlení pak zjistili pomocí vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

- a) Odhadněte, jakou chybou je zatíženo měření délky, pokud k měření použijeme obyčejný stavařský metr. Pak vypočítejte relativní nepřesnost tohoto měření, pokud je naměřená délka závěsu $l = 70$ cm. Výsledek vyjádřete v procentech.
- b) Odhadněte také nepřesnost měření času. Nezapomeňte, že kromě nepřesnosti stopek má na měření vliv i reakční doba experimentátora (odhadněte její velikost).
- c) Na výsledky měření mají dopad i vnější vlivy. Napište alespoň dvě síly, které na kyvadlo působí a mohou naše měření ovlivnit.
2. Při rozvodu elektrické energie do domácností dochází ke ztrátám energie ve vedení. Způsobuje to nenulový odpor přírodních vodičů. Stejně je tomu i v ČEZu, jehož technici tento odpor vedení měří tak, že si vezmou kabel s délkou $l = 1$ m a několikrát proměří jeho odpor, viz tabulka 2. Dále ví, že proud, který tímto kabelem ve skutečnosti teče, je $I = (2,5 \pm 0,3)$ A.

- a) Určete průměrnou hodnotu odporu kabelu a jeho směrodatnou odchylku pomocí vzorečků ve Výfučení.
- b) Známe-li tento odpor, můžeme spočítat ztrátový výkon, tzn. energii, která se v kabelu promění na teplo za jednu sekundu, a to pomocí vzorce

$$P = RI^2.$$

Vypočítejte tento výkon a pomocí pravidel o skládání chyb určete nepřesnost tohoto výpočtu.

- c) Výsledek správně zaokrouhlete a запиšte ve tvaru

$$P = (\text{průměrná hodnota} \pm \text{nepřesnost}) \text{ W}.$$

Tabulka 1: Naměřené hodnoty odporu

	R/Ω		R/Ω
1	21,2	6	21,0
2	23,7	7	22,3
3	19,9	8	21,1
4	19,6	9	19,9
5	20,4	10	20,3

1. Obyčejný meter má stupnicu, ktorej najmenší dielik má najčastejšie 1 mm. Ak týmto metrom meriame dĺžku kyvadla a náhodou sa stane, že koniec lanka bude presne medzi dvomi dielikmi, chyba, s akou musíme zapísať dĺžku, bude najviac 0,5 mm. Ak sme namerali dĺžku kyvadla 70 cm = 700 mm, relatívna chyba bude

$$\frac{0,5 \text{ mm}}{700 \text{ mm}} = 0,0007 = 0,07\%.$$

Ak teda uvážime len nepresnosť meradla, chyba dĺžky bude naozaj veľmi malá. V reálnom svete ale k chybe prispieva napríklad to, že kyvadlo je niekde zauzlené, lanko je pružné (a pri zaťažení zmení svoju dĺžku) a podobne.

Na určenie reakčnej doby existuje mnoho experimentov. Najjednoduchší z nich vykonáte s pomocou obyčajných stopiek, ktoré sa budete snažiť zastaviť hneď ako na nich uvidíte nula stotín. Dosiahnuť to je ale naozaj ťažké (prakticky nemožné), pretože vaše nedokonalé telo zareaguje s niekoľkostotinovým oneskorením. Takto namerané oneskorenia (pokus treba zopakovať viackrát) stačí spriemerovať, čím získate vašu priemernú reakčnú dobu. Typická hodnota je okolo 0,2 s.

Okrem tejto nepresnosti musíme ešte započítať aj nepresnosť stopiek, tzn. opäť polovicu najmenšieho dielika, čo je pri stopkách 0,005 s. Táto chyba je ale 40-krát menšia ako je reakčná doba, takže ju môžeme pokojne zanedbať.

Ďalšie chyby, ktoré mohli vzniknúť pôsobením vonkajších síl, je napríklad nepresnosť daná vztlakovou silou $F_{vz} = \rho_v V g$, kde $\rho_v = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, V objem závažia zaveseného na kyvadle a g tiažové zrýchlenie. Druhá pôsobiaca sila je napríklad odporová sila vzduchu, alebo elektrická či magnetická (pokiaľ by bola guľička vyrobená z kovu a bolo by prítomné vonkajšie elektrické či magnetické pole). Presný popis týchto síl pomocou vzorcov sa naučíte na strednej škole.

2. Ak chceme určiť priemernú hodnotu, Výfučtení nám radí všetky odpory spočítať: ak počítame správne, súčet 10 meraní je 209,4 Ω . Ďalej máme tento súčet vydeliť počtom meraní. Priemerná hodnota je teda

$$\langle R \rangle = \frac{209,4 \Omega}{10} = 20,94 \Omega \doteq 20,9 \Omega.$$

Priemerný odpor káblu je teda 20,9 Ω .

Smerodatnú odchýlku vypočítame tak, že najskôr od každej nameranej hodnoty odčítame priemernú hodnotu a tieto rozdiely umocníme na druhú, viď tabuľku 2.

Tabuľka 2: Výpočet druhých mocnín odchýlok od priemernej hodnoty

	$(R - \langle R \rangle)^2 / \Omega^2$		$(R - \langle R \rangle)^2 / \Omega^2$
1	0,09	6	0,01
2	7,84	7	1,96
3	1,00	8	0,04
4	1,69	9	1,00
5	0,25	10	0,36

Súčet týchto druhých mocnín je 14,24 Ω^2 . Tento súčet musíme podľa Výfučtení deliť číslom $n(n - 1)$, teda pre $n = 10$ meraní delíme číslom 90 a tento výsledok musíme ešte odmocniť

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{14,24 \Omega^2}{90}} = 0,398 \Omega \doteq 0,4 \Omega.$$

Odpor káblu teda môžeme zapísať v tvare

$$R = (20,9 \pm 0,4) \Omega.$$

Priemerný stratový výkon vieme vypočítať ihneď, použijeme priemerné hodnoty odporu a prúdu

$$P = RI^2 = 20,9 \Omega \cdot (2,5 \text{ A})^2 \doteq 130,6 \text{ W}.$$

Vo vzorci pre stratový výkon vystupuje prúd v druhej mocnине, čo nás ale neteší, pretože vzorec na výpočet chyby druhej mocniny vo Výfučení nenájdeme. Opak je pravdou – ak sa na druhú mocninu pozrieme ako na súčin dvoch rovnakých veličín, zo vzorca pre súčin ľahko zistíme, že relatívna chyba druhej mocniny je rovná dvojnásobku relatívnej chyby danej veličiny v prvej mocnине.

Pomocou vzorca pre chybu súčinu určíme aj relatívnu chybu výkonu

$$\delta_P = \delta_R + 2\delta_I = \frac{0,4 \Omega}{20,9 \Omega} + 2 \cdot \frac{0,3 \text{ A}}{2,5 \text{ A}} = 0,26.$$

Absolútnu odchýlku vypočítame z relatívnej chyby a priemernej hodnoty

$$\sigma_P = \delta_P P = 0,26 \cdot 130,6 \text{ W} = 33,96 \text{ W} \doteq 34 \text{ W}.$$

Ak aj hodnotu P zaokrúhlime na jednotky, môžeme napísať výsledok v tvare

$$P = (131 \pm 34) \text{ W}.$$

Sami vidíte, že počítanie chýb v experimentoch nie je vôbec ťažké. Stačí sa naučiť pár jednoduchých pravidiel, zvyšok je hračka.

Patrik Švančara
pato@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.