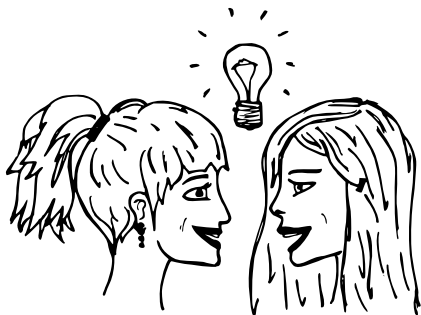


Úloha II.4 ... Hustoměr

7 bodů; průměr 6,00; řešilo 49 studentů



Radka s Andřejkou jsou mimořádně vynalézavé. Posledně předváděly Lukášovi a Terce svůj nový vynález, který slavnostně nazvaly hustoměr. Přístroj se skládá z tyčky zanedbatelné hmotnosti a délky $l = 20$ cm a ze závaží s hmotností $m = 400$ g, které je upevněno na pravém konci tyčky. Na levém konci je pak připevněno těleso, jehož hustotu chceme změřit.

Samotné měření probíhá tak, že nejdříve Radka naměří vzdálenost $a = 12$ cm od závaží o známé hmotnosti do místa, kam je třeba tyčku podepřít, aby byla v rovnováze. Pak přístroj předá Andřejce,

a ta ponoří měřené těleso do vody s hustotou $\rho_0 = 1000$ kg·m⁻³. Hustoměr se tak vychýlí z rovnováhy, ale Andřejka rychle nalezne novou vzdálenost $b = 6$ cm, kdy rovnováha opět nastane.

Lukáš vzal tužku a papír a za chvilku dívkám oznámil, jakou hustotu ρ měl neznámý předmět. Jaká hustota mu vyšla?

Rovnováha nastane, je-li celkový moment síly působící na tyčku nulový. Označíme si závaží o známé hmotnosti indexem 1 a těleso, jehož hustotu chceme změřit, indexem 2. Pak můžeme psát

$$M_1 - M_2 = 0.$$

Momenty se odečítají, neboť mají opačný směr (otáčejí pákou v opačném směru). V rovnováze, kterou nastavila Radka, působí na závaží i na těleso pouze tíhová síla $F = mg$. Dosadíme-li za momenty podle definice součin celkové síly a vzdálenosti od osy otáčení, dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 a &= F_2 (l - a), \\ m_1 g a &= m_2 g (l - a). \end{aligned}$$

Z druhé rovnice můžeme vyjádřit hmotnost zkoumaného tělesa m_2

$$m_2 = \frac{m_1 a}{l - a}.$$

Dosazením zadaných hodnot získáme hmotnost tělesa $m_2 = 600$ g.

Po ponoření tělesa do kapaliny se tyčka vychýlí, protože na něj kromě tíhové síly působí ještě vztlaková síla. V nové rovnovážné poloze, kterou našla Andřejka, musí opět platit, že celkový moment síly je nulový

$$\begin{aligned} M'_1 - M'_2 &= 0, \\ F'_1 b &= F'_2 (l - b). \end{aligned}$$

Na závaží stále působí pouze tíhová síla, tzn. $F_1 = F'_1$, ale za F'_2 musíme dosadit výslednici tíhové a vztlakové síly

$$F'_2 = F_g - F_{vz} = m_2 g - V_2 \rho_0 g.$$

Objem tělesa V_2 vypočítáme z jeho hustoty a hmotnosti

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}.$$

Nyní za síly dosadíme a vyjádříme ϱ_2

$$\begin{aligned} m_1 g b &= (m_2 g - V_2 \varrho_0 g)(l - b), \\ m_1 b &= m_2(l - b) - \frac{m_2}{\varrho_2} \varrho_0(l - b), \\ m_2 \varrho_0(l - b) &= m_2(l - b) \varrho_2 - m_1 b \varrho_2, \\ \varrho_2 &= \frac{m_2 \varrho_0(l - b)}{m_2(l - b) - m_1 b}. \end{aligned}$$

Za m_2 můžeme dosadit výraz, který jsme si odvodili, čímž dostáváme

$$\varrho_2 = \frac{\frac{m_1 a}{l - a}(l - b)}{\frac{m_1 a}{l - a}(l - b) - m_1 b} \varrho_0.$$

Jednoduchou úpravou zlomku dostáváme obecné řešení, do kterého můžeme dosadit konkrétní zadané hodnoty. Vzdálenosti nemusíme převádět na metry, neboť jednotky délky se pokrátí. Musíme ovšem dbát na to, abychom dosazovali pro délku, hmotnost a hustotu stejné jednotky. Tedy

$$\varrho_2 = \frac{a(l - b)}{l(a - b)} \varrho_0 = \frac{12 \text{ cm} \cdot (20 \text{ cm} - 6 \text{ cm})}{20 \text{ cm} \cdot (12 \text{ cm} - 6 \text{ cm})} 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1\,400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Druhou možností je dosadit rovnou číselně vypočítanou hmotnost tělesa a zadané veličiny, čímž se také dostaneme ke správnému výsledku

$$\varrho_2 = \frac{600 \text{ g} \cdot (20 \text{ cm} - 6 \text{ cm})}{600 \text{ g} \cdot (20 \text{ cm} - 6 \text{ cm}) - 400 \text{ g} \cdot 6 \text{ cm}} 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 1\,400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Pokud Lukáš počítal správně, vyšla mu hustota $1\,400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Lukáš Fusek
lukas@vyfuk.mff.cuni.cz

Tereza Uhlířová
teri@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.