

Úloha II.3 ... Dvě zvláštní zrcadla

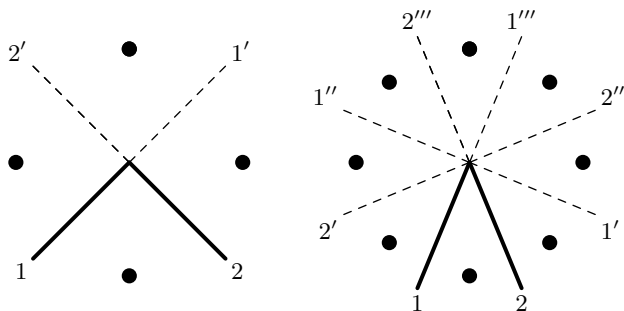
6 bodů; průměr 3,74; řešilo 50 studentů

Představme si dvě čtvercová zrcadla, která jednou stranou spojíme do „věčka“ tak, že spolu svírají úhel α . Pokud se do zrcadel zadíváme, nestačíme se divit, naše hlava se zobrazila do více míst najednou. Aby nás podobná situace příště nezaskočila, zjistěte, kolik obrazů hlavy vidíme při pohledu do zrcadel, pokud je úhel α roven 90° , 45° a 9° .

Nejprve se podíváme do normálního zrcadla. Pochopitelně uvidíme jen sami sebe, a to jednou. Co když si ale vezmeme dvě zrcadla a spojíme je podle zadání pod úhlem 90° . Pokud si to vyzkoušíme, uvidíme se *tříkrát*. Proč ale? Musíme si uvědomit, že zrcadlo zobrazuje celý náš svět do prostoru *za zrcadlem*,¹ který je vzhledem k zrcadlu osově symetrický.

Představme si, že se díváme na zrcadla, která svírají úhel 90° , viz obrázek 1. Zrcadlo 1 vytvoří obraz druhého zrcadla $2'$, který je prodloužením tohoto zrcadla. A stejně i zrcadlo 2 vytvoří obraz prvního zrcadla $1'$. Vznikají tak 4 „světy“, přičemž jeden z nich je reálný, zbylé 3 jsou jeho obrazy (proto se vidíme v zrcadlech *tříkrát*). Zajímavé je, že jeden z obrazů vznikne pomocí zrcadla, které reálně neexistuje, ale vzniklo jako odraz jednoho zrcadla v druhém.

Když úhel zmenšíme na polovinu, lze si vyzkoušet, že uvidíme celkově 7 odrazů. Opět si to můžeme představit pomocí zobrazování zrcadel, viz obrázek 1. Nejdříve vytvoří zrcadlo 1 obraz druhého zrcadla $2'$. Tento obraz ale lze následně zobrazit zrcadlem 2, získáváme tak obraz $2''$. Tento obraz můžeme opět zobrazit prvním zrcadlem, čímž získáváme obraz $2'''$. Podobně zobrazíme i ve druhém zrcadlu zrcadlo 1. Tím získáme obrazy $1'$, $1''$ a $1'''$. Další obrazy již nejsou možné, neboť tříčárkové obrazy se dále zobrazí jen do již stávajících obrazů. To znamená, že během sledování obrazů hlav v zrcadlech bychom získali pouze obrazy totožné s již vzniklými.



Obr. 1: Obrazy zrcadel pro úhly 90° a 45°

Všimněme si, že zrcadla a jejich obrazy zde vytvořily celkem 8 světů, přičemž jeden je reálný a zbylých sedm je virtuálních. Proto tedy vidíme v tomto uspořádání 7 obrazů.

Možná jste si už všimli, že při 90° (čtvrtina celého kruhu) nám zrcadla rozdělila prostor na čtvrtiny a vznikly tři obrazy, když jsme úhel zmenšili na polovinu (na osminu kruhu), rozdělili jsme každou čtvrtinu na polovinu, vznikly osmičky a dostali jsme sedm obrazů. Vidíme, že vždy dostaneme o jeden obraz méně, než kolikrát je úhel, který zrcadla svírají, menší než plný úhel. Toto můžeme poskládat do vzorce

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1,$$

¹To, že odraz v zrcadle vyplňuje nějaký prostor, je jenom iluze. Říkáme, že tento prostor je *virtuální*.

kde n je počet obrazů a α je úhel, který zrcadla svírají.

Pokud budeme měnit úhel α , může se stát, že n nebude celé číslo. Tehdy bychom viděli počet obrazů zaokrouhlený dolů a část dalšího obrazu.

Pomocí tohoto poznatku dopočítáme poslední úhel, protože vyzkoušet si tento případ je téměř nemožné

$$n = \frac{360^\circ}{9^\circ} - 1 = 40 - 1 = 39.$$

Pokud bude úhel α rovný 90° , 45° a 9° , uvidíme 3, 7 a 39 obrazů.

Poznámky k došlým řešením

Velmi častou chybou bylo, že řešitel si spletl počet obrazů s počtem odrazů. V mnoha případech také řešitel nepočítal s jeho hlavou (v případě, že mezi zrcadla strkal hlavu). Jinak musím velmi pochválit ty, co přišli i s grafickým řešením a nakreslili všechny obrazy.

Petr Šimůnek

petas@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.