

**Úloha II.1 . . . Von Dresden nach Wien** 3 body; průměr 2,68; řešilo 87 studentů

Centra měst Drážďany a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba  $d = 370$  km vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

Nápověda Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako

$$\begin{aligned}\sin \alpha &\approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &\approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3},\end{aligned}$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

Vzdálenost měst  $s_p$  po povrchu lze vyjádřit pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku

$$s_p = R_z \alpha,$$

kde  $R_z$  je poloměr Země a  $\alpha$  je úhel, který vytínají spojnice měst se středem Země. Z tohoto vztahu můžeme snadno vyjádřit

$$\alpha = \frac{s_p}{R_z}.$$

Vzdálenost měst  $s_t$  při cestě hypotetickým tunelem lze za znalosti úhlu  $\alpha$  vyjádřit jako (viz obrázek 1)

$$s_t = 2R_z \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Pro zjednodušení můžeme pro malé úhly aproximovat sinus prvními dvěma členy Taylorovy řady (v. nápovědu), tedy

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}.$$

Po dosazení této aproximace do vztahu (1) vychází

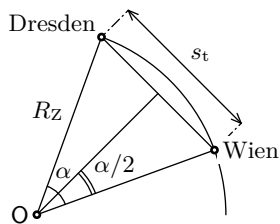
$$s_t \approx 2R_z \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} \right) = R_z \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{24} \right) = R_z \left( \frac{s_p}{R_z} - \frac{s_p^3}{24R_z^3} \right) = s_p - \frac{s_p^3}{24R_z^2},$$

a tedy

$$\Delta s = s_p - s_t = \frac{s_p^3}{24R_z^2}.$$

Po dosazení  $s_p = 370$  km a  $R_z = 6378$  km vychází  $\Delta s = 52$  m.

Odhadnout dobu cesty mezi těmito dvěma městy je záludné, neboť je potřeba znát průměrnou rychlost jízdy. Co ale můžeme snadno vyjádřit, je relativní změna doby jízdy při jízdě



Obr. 1: Tunnel z Drážďan do Vídně

tunelem za předpokladu, že průměrná rychlost jízdy na povrchu je stejná jako průměrná rychlost jízdy tunelem

$$\frac{\Delta t}{t_p} = \frac{\frac{\Delta s}{v}}{\frac{s_p}{v}} = \frac{\Delta s}{s_p}.$$

Po dosazení vychází  $\Delta t/t_p = 0,014\%$ , což je naprosto zanedbatelná hodnota. Pokud by průměrná rychlost činila např.  $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , pak by rozdíl doby jízdy při cestě po povrchu a tunelem činil zhruba  $\Delta t = 1,9 \text{ s}$ , což při celkové době jízdy 3 hodiny 42 minut nehraje opravdu žádnou roli.

Nakonec můžeme srovnat vzdálenost měst při cestě tunelem se vzdáleností měst při cestě po silnici. Podle webu <http://mapy.cz> je nejkratší cesta z Drážďan do Vídně dlouhá 438 km. Zjišťujeme tedy, že „klikatost“ silnice má na délku cesty mnohem větší vliv než to, že je Země kulatá.

*Zdeněk Jakub*  
zdenekjakub@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.