



Výfučtení: Keplerovy zákony

Lidé se odjakživa rádi dívali na úchvatnou noční oblohu. Objektům na nebeské sféře byly připisovány různé mystické a náboženské významy, a tak není divu, že první počiny lidského umu směřovaly právě sem.

Dodnes nás udivuje, jakými pozorovacími schopnostmi naši předkové oplývali. Velmi brzy si všimli, že kromě stálic na noční obloze se zde vyskytují také bližší souputníci – okolní planety. Snaha starověkých astronomů a astrologů o vysvětlení existence a mechanismů popisující jejich pohyb na obloze dostala znalosti některých civilizací na velmi vysokou úroveň.

Jedna z prvních evropských ucelených teorií byla teorie geocentrismu, prezentována řeckými učenci Platonem a Aristotelem. Tento model předpokládal, že nehybná Země je středem vesmíru a že všechny ostatní (do té doby známé) planety obíhají po kružnicích umístěných na sférách jako slupky cibule kolem Země (přičemž nejvzdálenější byla nehybná sféra stálic).

Tento model převzal a vylepšil ve svém díle *Almagest* Klaudios Ptolemaios, ovšem stále se jednalo o kruhové oběžné dráhy kolem nehybné Země. Tento model se ukázal být tak úspěšný, že jeho základ, později ještě podporovaný církví, přežil celých tisíc let.

Postupem času se vědci (zejména od 16. století) snažili prosadit novou teorii heliocentrismu, která už tvrdila, že centrem vesmíru není Země, ale Slunce, a že Země obíhá kolem něj.

Johannes Kepler

Tento německý matematik, astrolog a astronom významným způsobem rozšířil myšlenku heliocentrismu. Vedle ho k tomu analýza velmi přesných pozorování, která provedl na sklonku svého života dvorní matematik a astronom Rudolfa II. Tycho de Brahe.

V roce 1609 publikoval Kepler spis *Astronomia nova*, který obsahoval dva objevy, jež znamenaly počátek moderní astronomie. Šlo o první dva zákony, které jsou dnes známé jako Keplerovy. V očích Keplera a dalších prosazovatelů heliocentrického modelu vesmíru zasadil poslední úder geocentrické teorii Galileův objev čtyř měsíců obíhajících Jupiter v roce 1610, který geocentrismu přímo odporoval.

V roce 1619 Kepler uveřejnil třetí zákon, který byl důsledkem gravitačního působení planet a později byl teoreticky potvrzen Newtonem.

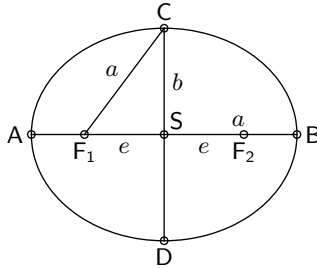
Keplerem objevené matematické zákonitosti znamenaly odrazový můstek pro další rozvoj astronomie. Jeho víra, že astronomie musí být založena na matematice a fyzice, z něj učinila jednoho z nejvýznamnějších aplikovaných matematiků všech dob. Jeho zákony, původně zamýšlené pro Sluneční soustavu, popisují všechny soustavy více těles, kde jedno centrální je mnohonásobně hmotnější než zbylá tělesa (tzn. planety a měsíce, Země a umělé družice, dvojhvězdy, kde jedna složka je mnohem těžší než druhá atd.).

1. Keplerův zákon

„Planety obíhají kolem Slunce po mírně eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.“

Tímto zákonem Kepler upřesnil myšlenku heliocentrismu a oprostil se od kružnicových trajektorií. Později byla jeho domněnka potvrzena teoreticky Isaacem Newtonem za pomoci v té době nově objeveného gravitačního zákona.

Mějme dva body v rovině. Elipsa je takový *rovinný* útvar, jehož všechny body mají konstantní součet vzdáleností od těchto význačných bodů, tzv. *ohnisek*, viz body F_1 a F_2 . Elipsu lze jednoznačně charakterizovat dvěma čísly: vzdáleností ohnisek $2e$ a součtem vzdáleností $|AS| + |BS| = 2a$.



Číslo e nazýváme *lineární excentricita*, a se nazývá *velká poloosa*, b *malá poloosa* a bodem S rozumíme střed elipsy. Mezi poloosami platí rovnost

$$e^2 = a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2.$$

Kromě lineární excentricity se v astronomii používá též pojem *číselná excentricita* ε ¹, která se definuje jako poměr lineární excentricity a velké poloosy

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Tato excentricita (neboli výstřednost) slouží k dobrému popisu míry „zploštělosti“ elipsy. Platí, že čím menší je lineární excentricita, tím větší je rozdíl $a - e$ a tím víc se daná elipsa blíží tvarem kružnici. Ve skutečnosti je lineární excentricita drah planet Sluneční soustavy malá a jejich dráhy velmi připomínají kružnice.² Například excentricita Země je $\varepsilon = 0,0167$, excentricita Neptunu dokonce jen $\varepsilon = 0,0073$. Při počítání a předvídání pohybů planet už ale tento rozdíl hraje významnou roli.

S pohybem planety kolem Slunce souvisí pojmy *afélium* (odsluní) a *perihélium* (přísluní).³ V okamžiku, kdy je planeta od Slunce nejdále, nachází se v aféliu; když je nejbližší, je v perihéliu. Vzdálenosti v aféliu a perihéliu značíme jednoduše r_a a r_p a platí pro ně vztahy

$$\begin{aligned} r_p &= a - e = a(1 - \varepsilon), \\ r_a &= a + e = a(1 + \varepsilon), \\ \varepsilon &= \frac{e}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \end{aligned}$$

¹Pozor, v některých materiálech se písmena e a ε zaměňují.

²Jako zřetelné elipsy vypadají dráhy některých asteroidů a většiny komet – protože i pro tato tělesa Keplerovy zákony platí.

³Je-li centrálním tělesem Země, označují se tyto body jako apogeum a perigeum. V apogeu a perigeu může být například Měsíc.

2. Keplerův zákon

„*Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za určitý čas jsou stejné.*“

Průvodič je spojnice planety a centrálního tělesa, Slunce. Díky tomuto zákonu víme, že velikost rychlosti planety v aféliu v_a je *menší* než velikost rychlosti planety v perihéliu v_p , neboť v blízkosti perihélia musí planeta urazit za tutéž dobu delší dráhu, aby zůstal zákon platný. Pohyb planety je tedy nerovnoměrný. Země prochází perihéliem v lednu a aféliem v červenci, proto je na severní polokouli zimní půlrok kratší než letní.

Ekvivalentní tvrzení s 2. Keplerovým zákonem je, že tzv. plošná rychlost ω planet se v čase nemění. V jednoduchém přiblížení lze uvažovat, že za krátký čas Δt opíše průvodič planety plochu

$$\Delta S = \frac{1}{2}rv\Delta t,$$

kde v je okamžitá rychlost planety a r je její vzdálenost od Slunce. Plošná rychlost je poté definována jako podíl

$$\omega = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv.$$

Pro rychlosti v_a a v_p , tedy rychlosti v bodech A a B se dostáváme ke vztahu

$$\frac{1}{2}r_a v_a = \frac{1}{2}r_b v_b, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_a}{v_b} = \frac{r_b}{r_a} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{a + e}{a - e}.$$

3. Keplerův zákon

„*Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos.*“

Symbolicky zapisujeme tento zákon

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Tento zápis platí jen pro planety, jejichž hmotnost je oproti centrálnímu tělesu zanedbatelná. Tato podmínka je velmi dobře splněna prakticky pro všechny objekty v Sluneční soustavě.⁴

Ze třetího Keplerova zákona plyne, že planety blízko Slunce jej oběhnou za kratší dobu, než planety vzdálené. V praktických výpočtech je tento zákon používán tak, že nějakou planetu porovnáváme se Zemí, přičemž za T_2 dosazujeme 1 rok a za a_2 1 AU, kde 1 AU je střední vzdálenost Země – Slunce, tzv. astronomická jednotka, jejíž velikost je

$$1 \text{ AU} \doteq 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Pokud tedy měříme oběžnou dobu planety v letech a délky poloos v AU, lze zákon přepsat do lehece zapamatovatelného tvaru

$$T^2 = a^3.$$

Pozor, v jiných jednotkách tato rovnost neplatí!

⁴Pro zajímavost uvěďme, že přesný tvar tohoto zákona je

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{M + m_1}{M + m_2},$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti planet a M hmotnost centrálního tělesa.

Původ tohoto zákona tkví v rovnosti gravitační a odstředivé síly, které na planetu působí. Opět předpokládáme, že hmotnost planety je vůči hmotnosti Slunce M zanedbatelná. Navíc předpokládáme, že planeta obíhá kolem Slunce po kruhové dráze (tehdy velká poloosa a splývá s poloměrem kružnice). Pak lze psát rovnost

$$G \frac{Mm}{a^2} = \frac{mv^2}{a}.$$

Pokud za rychlost dosadíme poměr dráhy $2\pi a$ a času T , po úpravě dostáváme

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

G a M jsou konstanty, tedy i poměr a^3/T^2 (nebo obráceně) musí být konstantní.

Závěr

Keplerovy zákony znamenaly opravdu veliký průlom v astronomii jako takové, umožnily velice přesně předpovídat a vysvětlovat spoustu úkazů na noční obloze a zase trochu poodhalily tajemstvím oplývající body pohybující se po nebeské sféře.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.