Výfučtení: Exponenciální a logaritmická funkce

Úvod

V minulých ročnících Výfuku jsme si již mohli něco přečíst o goniometrických a k nim inverzních funkcích cyklometrických. V tomto Výfučtení se budeme zabývat další částí rodiny funkcí, které je nutné znát, a to funkcí exponenciální opět spolu s její inverzní funkcí – logaritmickou. Co bychom v tomto textu chtěli zdůraznit, je, jak se vlastně tyto funkce chovají, jak bychom nad nimi měli uvažovat matematicky a v neposlední řadě kde se s nimi vlastně ve fyzice setkáme. K pochopení tohoto textu je důležité:

- Mít povědomí o tom, co je to funkce a jaké jsou její základní charakteristiky (definiční obor, obor hodnot, ...).
- Osvojit si pojmy jako jsou číselné obory spolu s jejich značením.
- Znát pravidla pro počítání s mocninami.

Obecná exponenciální funkce

Obecnou exponenciální funkcí budeme rozumět funkci ve tvaru

$$f(x) = a^x ,$$

kde číslo a se nazývá základ, neboli báze, a x je pro nás nezávislá proměnná. Definičním oborem exponenciální funkce jsou reálná čísla[1] $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, avšak na základ a klademe požadavek $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Proč? Kdyby totiž byl základ záporný, tak pro různá x (sudá a lichá celá čísla kupříkladu) bychom dostali

závislé proměnné jednou kladné, podruhé záporné, a graf by poté byl „roztrhaný“, nebyl by *spojitý*. Kdyby dále bylo $a = 0$, tak nula na jakoukoliv mocninu je vždy zase nula, a stejně kdyby $a = 1$, tak jedna na kteroukoliv mocninu je opět jedna. V obou případech se tedy jedná o konstantní funkce, ne exponenciální.

Za těchto omezujících podmínek pak vychází obor hodnot exponenciální funkce jako $\mathrm{H}_f = \mathbb{R}^+$. Exponenciální funkce není sudá, lichá ani periodická (můžeme se o tomto přesvědčit prověřením platnosti podmínek, které musejí takové funkce splňovat). Vlastnosti obecné exponenciální funkce ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} , \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} ,$$

$$(a^x)^y = a^{xy} ,$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y , \qquad a^x = b^x \Leftrightarrow a = b \text{ pokud } x \neq 0 .$$

[1] Zde se dopouštíme nepřesnosti, neboť uvažovat o této funkci má smysl i v oboru komplexních čísel, ale my se v našem textu budeme zabývat jen reálnými čísly, proto již nebudeme tato rozšíření dále komentovat.

Graf funkce

Nyní si povězme něco o grafu takovéto funkce. Důležité je uvědomit si, že jak bude graf vypadat závisí na *základu* a také, že pro *všechna* možná a prochází grafy těchto funkcí bodem [0;1].

Jak se skutečne obecná exponenciální funkce konstruuje je záležitostí vyšší matematiky, avšak na to, abychom se zamysleli nad prvním tvrzením, nepotřebujeme nic než trochu logického uvažování. Množina čísel, z kterých můžeme vybírat a, je Toto rozdělení na dva intervaly má svůj význam. Vezmeme-li za základ číslo z prvního intervalu, výsledná funkce bude klesající – čím větší x, tím menší je hodnota funkce. Bereme-li z počátku $x \in \mathbb{Z}$, tak si snadno potvrdíme, že třeba

$$0{,}5^{-2} = 4\,; \quad 0{,}5^{-1} = 2\,; \quad \dots \quad 0{,}5^{2} = 0{,}25\,; \quad 0{,}5^{3} = 0{,}125 \dots$$

Pokud bude základ větší než jedna, bude funkce na svém definičním oboru rostoucí:

$$2^{-2} = 0{,}25\,; \quad 2^{-1} = 0{,}5\,; \quad \dots \quad 2^{2} = 4\,; \quad 2^{3} = 8 \dots$$

Druhé tvrzení je ve své podstatě velice jednoduché. Jelikož je nezávislá proměnná v exponentu a definiční obor jsou reálná čísla, víme, že x nabyde nuly právě jednou. Ale „cokoli na nultou je jedna“, jinými slovy grafy exponenciálních funkcí opravdu prochází bodem [0;1] (matematicky řečeno $(x = 0) \implies [f(x) = 1]$).

Exponenciální funkce

Nyní, když jsme si ujasnili, jak vypadá graf, se budeme bavit o speciálních případech. Obyčejně se totiž nesetkáme s obecnou exponenciální funkcí, ale s takovou, která má za základ Eulerovo číslo. Eulerovo číslo e je stejně jako Ludolfovo číslo π iracionální s hodnotou přibližně

$$\mathrm{e} = 2{,}7181\dots$$

Důvody, které vedou k zavedení takovéto funkce souvisí s vyšší matematikou, nebudeme se zde jimy zabývat, avšak je nutné si tuto *přirozenou* exponenciální funkci zapamatovat, neboť v matematice i ve fyzice se s žádnou jinou prakticky nesetkáváme. Její důležitost vyplývá už jen z toho, že funkce e^x samotná se pojmenovává exponenciální (zkráceně se též používá exponenciála), zatímco a^x je obecná exponenciální funkce (i v angličtině se rozlišuje mezi *exponential function* a *exponential growth*). Ostatně této terminologie se držíme i v tomto Výfučtení. Kromě matematického značení e^x se používá též $\exp(x)$, a to zejména, je-li v exponentu složitější výraz.

Exponenciální růst

Často se můžeme setkat i mezi laickou veřejností, například ve zprávách, s pojmem exponenciální růst. Co to tedy vlastně znamená a jak je na tom obecná exponenciální funkce v porovnání s dalšími elementárními funkcemi? Lidově řečeno exponenciální (ná)růst znamená něco, co se zvětšuje velice rychle. A i matematicky zjišťujeme, že obecná exponenciální funkce stoupá pro stejné nezávislé proměnné mnohem rychleji nežfunkce lineární, kvadratická, kubická... Někdy se třeba nemusí zdát, že toto platí, avšak nakonec, pro nějaká velká x, exponenciální funkce ostatní „předežene“. Samozřejmě existuje mnoho funkcí, které rostou ještě rychleji,[2] ale s těmito funkcemi se v běžné praxi nesetkáte. Zde bychom také měli zdůraznit častou chybu. Exponenciální funkce není mocninná (pro zajímavost se jedná dokonce o transcendentní funkci – jako jsou funkce goniometrické)!

[2] Nejznámější příklady jsou funkce faktoriál $x!$ a x^x.

Logaritmická funkce

Co když známe číslo y a chceme k němu přiřadit vzhledem k a takové x, aby platilo $y = a^x$? K tomu složí tzv. logaritmická funkce, což je funkce inverzní k obecné exponenciální funkci. Značí se

$$y = \log_a x \,,$$

co čteme:„y je logaritmus o základu a z čísla x“. Vzhledem k tomu, že se jedná o navzájem inverzní funkce, tak pro určení y využíváme následující ekvivalence

$$(y = \log_a x) \Leftrightarrow (x = a^y)$$

Uvažujme nad tímto vyjádřením následovně – chceme třeba určit $\log_{10}(100)$. Podle ekvivalence výše tedy hledáme takové ypsilon, které splňuje $100 = 10^y$. Snadno nahlédneme, že $y = 2$. Platí tedy $\log_{10}(100) = 2$.

Vlastnosti logaritmické funkce snad odvodíme z funkce exponenciální. Znovu se dovoláme k uvedené ekvivalenci – omezení, která klademe na a, x budou muset být

$$a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \,, \quad x \in \mathbb{R}^+ \,, \quad y \in \mathbb{R}$$

Všimněme si, jak se „prohodily“ definiční obor a obor hodnot mezi logaritmickou a obecnou exponenciální funkcí. Tato vlastnost je společná inverzním funkcím obecně. Další vlastnosti logarimické funkce

$$\begin{aligned}
\log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y \,, \\
\log \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \,, \\
\log_a x^y &= y \log_a x \,, \\
\log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \,, \\
(\log_a x = \log_a y) &\Leftrightarrow (x = y) \;.
\end{aligned}$$

Graf logaritmické funkce

První, co bychom si měli říci je, že tvarem jsou grafy obou navzájem inverzních funkcí shodné. Ovšem jsou spolu osově souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu, jehož odpovídající lineární funkce má předpis $x = y$. Další podobností je průsečík, tentokrát však s osou x. Všechny grafy logaritmických funkcí prochází bodem $[1; 0]$. Podobně taky podle základu dostáváme, že pro $1 > a > 0$ je funkce log klesající a pro $a > 1$ je rostoucí.

Specifické případy

Stejně jako v případě exponenciální závislosti se i zde setkáváme pouze s některými základy. Praktické uplatnění našel desítkový logaritmus značený jednoduše log – v dobách, kdy nebyly k dispozici kalkulačky se používaly logaritmická pravítka spolu s logaritmickými tabulkami k výpočtu početních operací s velkými či desetinnými čísly (možná ještě má doma taková pravítka někdo z vaší rodiny). Oblast, kde se dále setkáme s tímto logaritmem jsou veličiny týkající se člověka (například veličiny týkající se viditelného světla, decibely u zvuku) – jde o to, že lidský organismus vnímá zvuk a světlo logaritmicky s jejich intenzitou. Dokonce i pH v chemii je logaritmická jednotka, stejně jako magnitudo, kterým se měří síla zemětřesení... Další využití, s kterým máme možnost se obyčejně setkat, jsou grafická zpracování naměřených dat. Jestliže totiž roste jedna proměnná mnohem rychleji něž druhá, je možné použít pro danou osu místo klasické lineární stupnice, kterou znáte ze školy, logaritmickou stupnici.

Stejně jako u přirozené exponenciální funkce se setkáváme i zde s Eulerovým číslem. Přirozený logaritmus o základu e je opět hojně využíván v matematice i fyzice. Takový logaritmus neznačíme $\log_e x$, jak by člověk čekal, ale díky četnosti použití se u nás prosadil kratší zápis $\ln x$, ze slov *logaritmus naturalis*.

O dalších základech se v podstatě nemá cenu bavit, neboť v praxi se s nimi nepočítá a když je jich náhodou potřeba, není problém si mezi sebou základy převádět pomocí zmíněného vzorce

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,.$$

Věřím, že někteří z vás ve vyšších ročnících si už čtou v angličtině. Anglosasové totiž ještě zjednodušili zde prezentovaný zápis logaritmů, který platí jen v ČR a některých dalších zemích. V anglických textech se používá log jako přirozený a všechny ostatní už mají jako dolní index uvedený základ, žádné zjednodušení už nečekejme. Z počátku to může působit mírně chaoticky, neboť u nás se to samé značení používá jako desíkový logaritmus $\log_{10} \equiv \log$ (znak , resp. relaci, $\equiv$ čtěme jako „definatoricky rovno“). V tomto Výfučtení a v zadání úloh se držíme samozřejmě českého značení.

Využití

Je velmi obtížné najít pro logaritmy a exponenciály nějaké přímé upotřebení. Trochu ironické, vzhledem k tomu, jak častou se uplatňují v rámci jiných oblastí.

Začněme matematickými a informatickými problémy. Ačkoliv je logarimus transcendentní funkce, najdeme jej i v tak čísté matematice, jako je teorie čísel, resp. prvočísel. Pomocí logaritmu je definována prvočíselná funkce dávající přibližný počet prvočísel menších než číslo n. Dále se objevuje logaritmus v tzv. fraktální geometrii. Zajímavou aplikací z praxe je Benfordův zákon, který tvrdí, že v souborech dat vytvořených člověkem (neplatí tedy pro dokonale náhodná čísla) neplatí zákony klasické teorie pravděpodobnosti, ale že nejvíce čísel z takového souboru dat začíná na nejmenší číslici 1 a naopak nejméně čísel začíná na 9. Tento zákon se používá např. ke sledování, zda nebyly volby zmanipulovány. V informatice nás často zajímá výpočetní složitost algoritmu, který jsme vymysleli. Ten se popisuje i pomocí logaritmu a slouží k porovnávání efektifity. Čím menší složitost, tím rychleji daný logaritmus vyřeší zadaný problém.

Ve fyzice bychom mohli začít něčím, co by už pro vás mělo být známé.

1. Jaderné rozpady probíhají jako exponenciální pokles

   $$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

   kde N je počet částic v čase t, N_0 je pak počet částic v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ a λ je rozpadová konstanta, která se váže k danému prvku.
2. Další veličina, která exponenciálně v průběhu času klesá, je výška vodní hladiny v nádobě. Kdobychom udělali do „PET flašky“ u dna díru, rozdíl tlaků na hladině a u dna

(hydrstatický tlak) způsobí samovolné vytékání obsahu nádoby a sižování hladiny podle velmi podobného vztahu (k je vhodná časová konstanta)

$$h(t) = h_0 \mathrm{e}^{-kt}\,.$$

3. Pokud do kmitání započítáme odporové síly, dostaneme tlumené kmitání. Rovnice tlumeného kmitání je následující

$$y(t) = y_m \mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t)\,.$$

Tato „tlumicí“ exponenciála, která se vyskytuje v onom známějším a jednodušším kmitání, jistým způsobem deformuje funkci sinus. Díky tomu, že se mění s časem, nefiguruje zde jako amplituda. Podle koeficientu útlumu b rozlišujeme tři typy tlumeného kmitání – kupříkladu tlumiče pérování u automobilů tlumí tak výrazně, že kmitání skoro nepoznáme.
4. Dále nabíjení kondenzátoru v obvodu stejnosměrného proudu o napětí U obsahující odpor R – náboj uchovaný v kondenzátoru o kapacitě C se zvětšuje podle funkce

$$Q(t) = CU\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)\,.$$

Samozřejmě se setkáme s exponenciálami v elektrických obvodech častěji (též se střídavým proudem).
5. Poslední aplikaci, kterou zde zmíníme budou Ciolkovského rovnice popisující ideální raketu poháněnou reaktivním motorem. Taková raketa totiž postupně přichází o hmotnost spotřebovaného paliva a její pohyb se opět popisuje pomocí vztahů, v nichže se v hojném počtu vyskytují logaritmy a exponenciály. Pro maximální změnu rychlosti rakety, jejíž původní hmotnost před manévrem je M_0 a po M_1 a rychlost výfukových plynů je v_0 je

$$\Delta v = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)\,.$$

Závěr

To už je vše. Jak jsme se snažili zde ukázat, opravdu se s těmito funkcemi setkáváme i tam, kde bychom to možná nečekali, od čisté matematiky po nejsložitější fyziku. Existuje skutečně nepřeberné množství jevů okolo nás, které sledují exponenciální průběh a se kterými musíme umět pracovat – ať už jako fyzici, matematici, statistici, strojaři... Eponenciální a logaritmická funkce nás bude už navždy provázet.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.