

VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ

ročník III

číslo 6/7

Milí kamarádi,

v rukou držíte šestou brožurku Výfuku. Jelikož se blíží konec roku, naleznete zde zadání poslední, šesté, série třetího ročníku. Brožurka tradičně obsahuje čtyři teoretické, jednu experimentální úlohu a jednu úlohu k Výfučení, jež se zabývá tématem astronomie, a to Keplerovými zákony. Tato série rozhodne o konečném pořadí, proto vám při řešení úloh přejeme mnoho zdaru.

Kromě zadání si můžete přečíst vzorová řešení 4. série, stejně jako průběžné pořadí.

Anketa

V obálkách byste měli najít anketní listky, pomocí kterých můžete ohodnotit, jak se vám líbil průběh tohoto ročníku. Vyplnění ankety není povinné, ale budeme velmi rádi, pokud od vás dostaneme odpověď. Vyplněné anketní listky nám prosím zašlete s řešením šesté série nebo prostřednictvím e-mailu.

Organizátoři

vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání VI. série



Termín uploadu: 20. 5. 2014 20.00

Termín odeslání: 19. 5. 2014

Úloha VI.1 ... Papír

4 body

Verča si přednedávnem koupila balík kancelářského papíru formátu A4. Když z balíku vytáhla štos papírů s výškou $H = 2$ cm, odhadla, že váží $m = 0,5$ kg. Na balení navíc našla gramáž papíru, $G = 80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$.¹ Tyto informace stačily Verči na to, aby věděla, jak hrubý je jeden list. Vypočtete tuto informaci i vy, rozměry formátu A4 hledejte například na internetu.

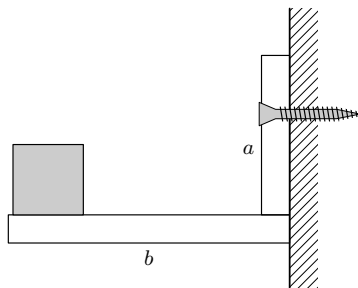
¹To znamená, že 1 m^2 papíru váží 80 g.

Úloha VI.2 ... Kvalitní police

5 bodů

Paťo zjistil, že na koleji už nemá žádné volné místo, a tak si pořídil polici, která vypadá jako na obrázku. Na zdi ji drží dva šrouby – každý z nich se ve stěně udrží, není-li z ní vytahován silou větší než 400 N. Jaké největší závaží může Paťo položit na okraj police, aniž by spadla ze zdi?

Předpokládejte, že police je velmi pevná, a přesto skoro nic neváží. Rozměry police jsou $a = 36$ mm (zespodu po šroub), $b = 24$ cm.



Obr. 1: Schéma police – druhý šroub je za šroubem na obrázku

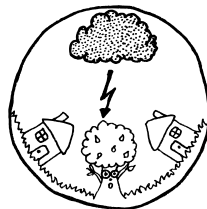
Úloha VI.3 ... Hlučná blýskavice

6 bodů

Lukáš a Terka bydlí v blízkých městech. Jednou, někde na spojnici jejich bydlišť, oba zpozorovali bouřkový mrak. Najednou udeřil blesk a oba změřili čas, který uplynul mezi světelným zábleskem a hřměním. Poté si časy porovnali a zjistili, že Terka slyšela hřmění o Δt později než Lukáš.

Pokud víte, že vzdálenost mezi bydlišti Terky a Lukáše je d a rychlost zvuku je u , vyjádřete ze zadaných veličin vzorec pro vzdálenost a Lukáše od bouřky a vzdálenost b Terky od bouřky.

Rychlost světla je oproti rychlosti zvuku mnohem větší. Můžete tedy předpokládat, že záblesk uviděli oba okamžitě, a tudíž současně.



Úloha VI.4 ... Nafouknutá planeta

9 bodů

Již na začátku 18. století objevil Isaac Newton slavný gravitační zákon popisující gravitační sílu mezi dvěma tělesy

$$F_g = G \frac{mM}{r^2}. \quad (1)$$

V této rovnici m a M vyjadřují hmotnosti dvou těles a r vzdálenost jejich těžišť. G je gravitační konstanta,² která má v soustavě SI velikost

$$\{G\} = 6,67 \cdot 10^{-11}.$$

1. Z rovnice (1) určete jednotku gravitační konstanty v soustavě SI.
2. Je-li poloměr Země $r = 6378$ km a její hmotnost $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, vypočítejte tíhové zrychlení g na povrchu Země.

Pomůcka: Porovnejte rovnici (1) se vzorečkem pro tíhovou sílu, který znáte z hodin fyziky.

3. Představte si, že by se poloměr Země zdvojnásobil, ovšem její hmotnost by se nezměnila. Jaké by bylo gravitační zrychlení g' na takovéto Zemi?

²Někdy se tato konstanta značí i řeckým písmenem κ .

4. Víme, že Měsíc obíhá kolem Země přibližně po kruhové dráze s poloměrem R , protože gravitační síla Země se v této vzdálenosti vyrovnává s odstředivou silou o velikosti

$$F_o = \frac{M_m v^2}{R},$$

kde v je rychlost pohybu Měsíce kolem Země a M_m hmotnost Měsíce. O kolik by se změnila vzdálenost R , pokud se Země zvětší stejně jako v předešlém bodě?

Úloha VI.E ... Dlouhá čára

8 bodů

Mišo se zamýšlel nad tím, zda-li je lepší psát obyčejnou tužkou, nebo mikrotužkou. Radka mu řekla, že mikrotužka je daleko lepší, protože má větší „výdrž“.

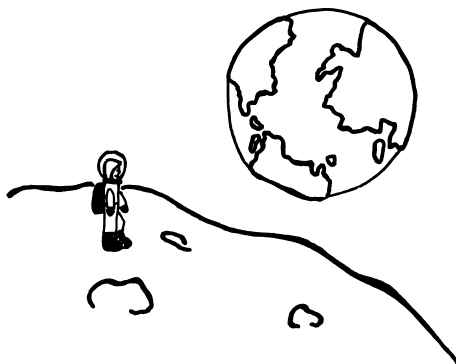
Zkuste změřit, jak dlouhou čáru lze nakreslit jednou náplní do mikrotužky. Jelikož jste fyzici, věříme, že tuto informaci zjistíte bez nutnosti celou mikrotužku skutečně vypsát. Svoje měření opakujte, výsledky zprůměrujte a odhadněte chybu měření. V řešení pak udejte i tloušťku měřené náplně, stejně jako její typ (měkká, tvrdá apod.).



Úloha VI.C ... Po planetách

9 bodů

1. Planetka je v aféliu od Slunce vzdálená 4,4 AU, v perihéliu 1,6 AU. Vypočítejte oběžnou dobu planetky.
2. Většina telekomunikačních družic obíhá kolem Země po tzv. geostacionární dráze – pozorovateli ze zemského povrchu se zdá, že družice „stojí“ na stejném místě na obloze. Jinými slovy, doba oběhu T geostacionární družice je stejná, jako perioda rotace Země: $T = 24$ hod, přičemž dle 3. Keplerova zákona je doba oběhu družice určena její vzdáleností od Země. V jaké výšce *nad zemským povrchem* musí obíhat družice, aby byla geostacionární?





Výfučtení: Keplerovy zákony

Lidé se odjakživa rádi dívali na úchvatnou noční oblohu. Objektům na nebeské sféře byly připisovány různé mystické a náboženské významy, a tak není divu, že první počiny lidského umu směřovaly právě sem.

Dodnes nás udivuje, jakými pozorovacími schopnostmi naši předkové oplývali. Velmi brzy si všimli, že kromě stálic na noční obloze se zde vyskytují také bližší souputníci – okolní planety. Snaha starověkých astronomů a astrologů o vysvětlení existence a mechanismů popisující jejich pohyb na obloze dostala znalosti některých civilizací na velmi vysokou úroveň.

Jedna z prvních evropských ucelených teorií byla teorie geocentrismu, prezentována řeckými učenci Platonem a Aristotelem. Tento model předpokládal, že nehybná Země je středem vesmíru a že všechny ostatní (do té doby známé) planety obíhají po kružnicích umístěných na sférách jako slupky cibule kolem Země (přičemž nejvzdálenější byla nehybná sféra stálic).

Tento model převzal a vylepšil ve svém díle *Almagest* Klaudios Ptolemaios, ovšem stále se jednalo o kruhové oběžné dráhy kolem nehybné Země. Tento model se ukázal být tak úspěšný, že jeho základ, později ještě podporovaný církví, přežil celých tisíc let.

Postupem času se vědci (zejména od 16. století) snažili prosadit novou teorii heliocentrismu, která už tvrdila, že centrem vesmíru není Země, ale Slunce, a že Země obíhá kolem něj.

Johannes Kepler

Tento německý matematik, astrolog a astronom významným způsobem rozšířil myšlenku heliocentrismu. Vedla ho k tomu analýza velmi přesných pozorování, která provedl na sklonku svého života dvorní matematik a astronom Rudolfa II. Tycho de Brahe.

V roce 1609 publikoval Kepler spis *Astronomia nova*, který obsahoval dva objevy, jež znamenaly počátek moderní astronomie. Šlo o první dva zákony, které jsou dnes známé jako Keplerovy. V očích Keplera a dalších prosazovatelů heliocentrického modelu vesmíru zasadil poslední úder geocentrické teorii Galileův objev čtyř měsíců obíhajících Jupiter v roce 1610, který geocentrismu přímo odporoval.

V roce 1619 Kepler uveřejnil třetí zákon, který byl důsledkem gravitačního působení planet a později byl teoreticky potvrzen Newtonem.

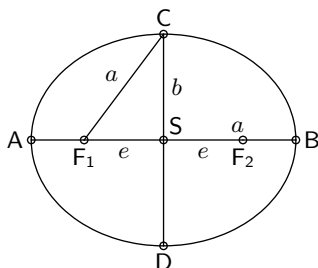
Keplerem objevené matematické zákonitosti znamenaly odrazový můstek pro další rozvoj astronomie. Jeho víra, že astronomie musí být založena na matematice a fyzice, z něj učinila jednoho z nejvýznamnějších aplikovaných matematiků všech dob. Jeho zákony, původně zamýšlené pro Sluneční soustavu, popisují všechny soustavy více těles, kde jedno centrální je mnohonásobně hmotnější než zbylá tělesa (tzn. planety a měsíce, Země a umělé družice, dvojhvězdy, kde jedna složka je mnohem těžší než druhá atd.).

1. Keplerův zákon

„Planety obíhají kolem Slunce po mírně eliptických drahách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.“

Tímto zákonem Kepler upřesnil myšlenku heliocentrismu a oprostil se od kružnicových trajektorií. Později byla jeho domněnka potvrzena teoreticky Isaacem Newtonem za pomoci v té době nově objeveného gravitačního zákona.

Mějme dva body v rovině. Elipsa je takový *rovinný* útvar, jehož všechny body mají konstantní součet vzdáleností od těchto význačných bodů, tzv. *ohnisek*, viz body F_1 a F_2 . Elipsu lze jednoznačně charakterizovat dvěma čísly: vzdáleností ohnisek $2e$ a součtem vzdáleností $|AS| + |BS| = 2a$.



Číslo e nazýváme *lineární excentricita*, a se nazývá *velká poloosa*, b *malá poloosa* a bodem S rozumíme střed elipsy. Mezi poloosami platí rovnost

$$e^2 = a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2.$$

Kromě lineární excentricity se v astronomii používá též pojem *číselná excentricita* ε^3 , která se definuje jako poměr lineární excentricity a velké poloosy

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Tato excentricita (neboli výstřednost) slouží k dobrému popisu míry „zploštělosti“ elipsy. Platí, že čím menší je lineární excentricita, tím větší je rozdíl $a - e$ a tím víc se daná elipsa blíží tvarem kružnici. Ve skutečnosti je lineární excentricita drah planet Sluneční soustavy malá a jejich dráhy velmi připomínají kružnice.⁴ Například excentricita Země je $\varepsilon = 0,0167$, excentricita Neptunu dokonce jen $\varepsilon = 0,0073$. Při počítání a předvídání pohybů planet už ale tento rozdíl hraje významnou roli.

S pohybem planety kolem Slunce souvisí pojmy *afélium* (odsluní) a *perihélium* (přísluní).⁵ V okamžiku, kdy je planeta od Slunce nejdále, nachází se v aféliu; když je nejbližší, je v perihéliu. Vzdálenosti v aféliu a perihéliu značíme jednoduše r_a a r_p a platí pro ně vztahy

$$\begin{aligned} r_p &= a - e = a(1 - \varepsilon), \\ r_a &= a + e = a(1 + \varepsilon), \\ \varepsilon &= \frac{e}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \end{aligned}$$

³Pozor, v některých materiálech se písmena e a ε zaměňují.

⁴Jako zřetelné elipsy vypadají dráhy některých asteroidů a většiny komet – protože i pro tato tělesa Keplerovy zákony platí.

⁵Je-li centrálním tělesem Země, označují se tyto body jako apogeum a perigeum. V apogeum a perigeum může být například Měsíc.

2. Keplerův zákon

„Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za určitý čas jsou stejné.“

Průvodič je spojnice planety a centrálního tělesa, Slunce. Díky tomuto zákonu víme, že velikost rychlosti planety v aféliu v_a je *menší* než velikost rychlosti planety v perihéliu v_p , neboť v blízkosti perihélia musí planeta urazit za tutéž dobu delší dráhu, aby zůstal zákon platný. Pohyb planety je tedy nerovnoměrný. Země prochází perihéliem v lednu a aféliem v červenci, proto je na severní polokouli zimní půlrok kratší než letní.

Ekvivalentní tvrzení s 2. Keplerovým zákonem je, že tzv. plošná rychlost ω planet se v čase nemění. V jednoduchém přiblížení lze uvažovat, že za krátký čas Δt opíše průvodič planety plochu

$$\Delta S = \frac{1}{2}rv\Delta t,$$

kde v je okamžitá rychlost planety a r je její vzdálenost od Slunce. Plošná rychlost je poté definována jako podíl

$$\omega = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}rv.$$

Pro rychlosti v_a a v_p , tedy rychlosti v bodech A a B se dostáváme ke vztahu

$$\frac{1}{2}r_a v_a = \frac{1}{2}r_b v_b, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_a}{v_b} = \frac{r_b}{r_a} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{a + e}{a - e}.$$

3. Keplerův zákon

„Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos.“

Symbolicky zapisujeme tento zákon

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Tento zápis platí jen pro planety, jejichž hmotnost je oproti centrálnímu tělesu zanedbatelná. Tato podmínka je velmi dobře splněna prakticky pro všechny objekty v Sluneční soustavě.⁶

Ze třetího Keplerova zákona plyne, že planety blízko Slunce jej oběhnou za kratší dobu, než planety vzdálené. V praktických výpočtech je tento zákon používán tak, že nějakou planetu porovnáváme se Zemí, přičemž za T_2 dosazujeme 1 rok a za a_2 1 AU, kde 1 AU je střední vzdálenost Země – Slunce, tzv. astronomická jednotka, jejíž velikost je

$$1 \text{ AU} \doteq 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}.$$

Pokud tedy měříme oběžnou dobu planety v letech a délky poloos v AU, lze zákon přepsat do lehe zapamatovatelného tvaru

$$T^2 = a^3.$$

Pozor, v jiných jednotkách tato rovnost neplatí!

⁶Pro zajímavost uvěďme, že přesný tvar tohoto zákona je

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{M + m_1}{M + m_2},$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti planet a M hmotnost centrálního tělesa.

Původ tohoto zákona tkví v rovnosti gravitační a odstředivé síly, které na planetu působí. Opět předpokládáme, že hmotnost planety je vůči hmotnosti Slunce M zanedbatelná. Navíc předpokládáme, že planeta obíhá kolem Slunce po kruhové dráze (tehdy velká poloosa a splývá s poloměrem kružnice). Pak lze psát rovnost

$$G \frac{Mm}{a^2} = \frac{mv^2}{a}.$$

Pokud za rychlost dosadíme poměr dráhy $2\pi a$ a času T , po úpravě dostáváme

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

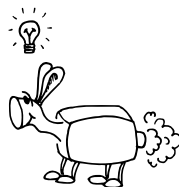
G a M jsou konstanty, tedy i poměr a^3/T^2 (nebo obráceně) musí být konstantní.

Závěr

Keplerovy zákony znamenaly opravdu veliký průlom v astronomii jako takové, umožnily velice přesně předpovídat a vysvětlovat spoustu úkazů na noční obloze a zase trochu poodhalily tajemstvím oplývající body pohybující se po nebeské sféře.



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Magnetky

4 body; průměr 3,46; řešilo 61 studentů

Jarda našel ve skříni pohozené magnety, z nichž každý měl na sobě napsané jiné písmeno. Některé magnety byly ukončené vypuklým plastem tak, že se daly připojit k jiným magnetům pouze jedním pólem. Mohly tedy tvořit jen začátek, nebo konec „magnetického“ řetízku. Jarda se rozhodl, že si postaví nejdelší možný řetízek: použije všechny obyčejné, dvoupólové magnety, které ukončí dvěma „jednopólovými“ magnety. Kolika různými způsoby dokáže Jarda magnety seřadit, pokud má 3 dvoupólové magnety, 4 magnety pouze se severním pólem a 6 pouze s jižním pólem?

Na začátek je dobré si ještě jednou uvědomit, jak bude řetízek vypadat. Na obou okrajích budou *jednopólové* magnety a mezi nimi „jádro“ tvořené třemi *dvoupólovými* magnety. Označme si je písmeny A , B a C .

Nejprve si tedy vypočítáme, kolik různých jader jsme schopni sestavit. Stačí si uvědomit, že na první pozici může být jeden ze tří magnetů, na druhou pozici k němu můžeme doplnit jeden ze dvou zbývajících a na třetí pozici poslední z nich. Počet možností si poté můžeme vyjádřit jako⁷

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Platnost tohoto vztahu si také můžeme ověřit vypisáním všech kombinací:

⁷Součin všech kladných celých čísel menších nebo rovných n se nazývá tzv. *faktoriál* čísla n : faktoriál značíme symbolem $n!$. V tomto případě platí $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$.

$A, B, C \quad B, A, C \quad C, A, B$
 $A, C, B \quad B, C, A \quad C, B, A$

Celkem máme tedy 6 možností. Nyní přejdeme na okrajové magnetky. Nejprve na ty se severním pólem (na pořadí ale nezáleží): ke každému jádru můžeme přiřadit 4 magnetky, počet možností je tedy

$$6 \cdot 4 = 24.$$

To samé platí pro magnetky s jižním pólem – ke každé kombinaci jádra s magnetem se severním pólem můžeme přiřadit 6 magnetů. Celkový počet možností vypočítáme

$$24 \cdot 6 = 144.$$

Máme tedy 144 možností, jak magnetický řetízek sestavit.

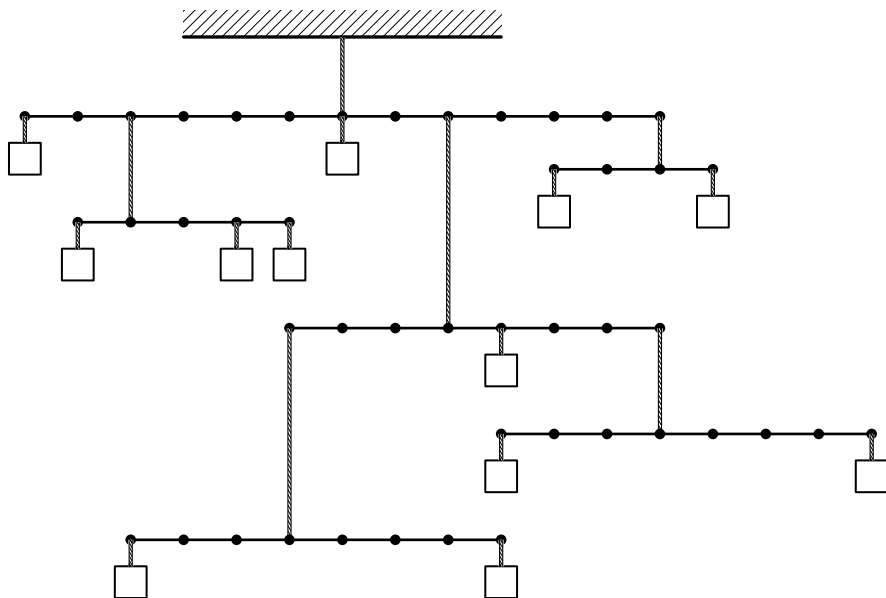
Jaroslav Janoš

jarda@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... Rovnováha

5 bodů; průměr 3,61; řešilo 54 studentů

Do schématu na obrázku 4 doplňte po jednom závaží od 1 kg do 12 kg tak, aby byla soustava pák vyvážená. Hmotnost tyček a provázků zanedbejte.



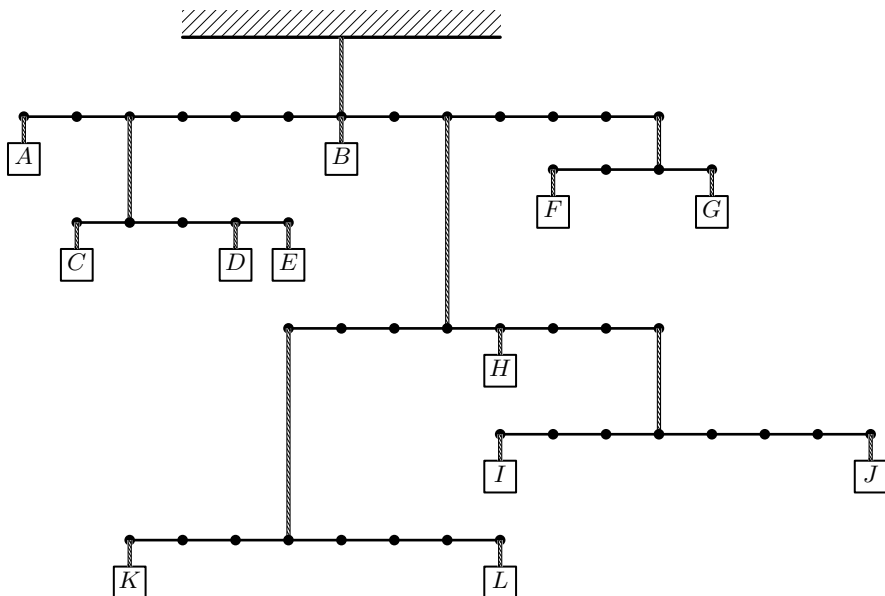
Obr. 2: Schéma pák

Při řešení této úlohy budeme vycházet ze znalosti, že páka se nachází v rovnováze, je-li výsledný moment síly vůči ose procházející bodem závěsu nulový. To znamená, že celkový moment na

levé straně páky musí být stejný jako výsledný moment na pravé straně. Moment síly M přitom spočítáme jako součin působící síly F ve vzdálenosti d od osy otáčení

$$M = Fd.$$

Pro zjednodušení výpočtů budeme do všech rovnic místo síly dosazovat hmotnost závaží v kilogramech (všechny rovnice podělíme gravitačním zrychlením g). Abychom se lépe orientovali mezi jednotlivými závažími, označíme si je zleva doprava a shora dolů postupně písmeny A až L jako na obrázku 4.



Obr. 3: Označení pák

Začneme dvěma rovnováhami na pákách úplně dole (závaží $K - L$ a $I - J$). V obou případech působí na pravé straně závaží ve vzdálenosti 4 jednotky a na levé straně ve vzdálenosti 3 jednotky od místa závěsu. Z výše zmíněného vztahu

$$3m_1 = 4m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4}{3},$$

tedy vychází poměr hmotností použitých závaží 4 : 3, možné jsou tedy kombinace 4 kg a 3 kg, 8 kg a 6 kg, 12 kg a 9 kg. Zároveň musí nastat rovnováha i na páce o jedno patro výše (páka $(K + L) - (H + I + J)$), což po dosazení do rovnosti momentů lze zapsat jako

$$(K + L) = 4(I + J) + H.$$

Nalevo můžeme ze zbylých závaží získat hodnoty 21 kg, 42 kg nebo 63 kg, napravo 28 kg + H , 56 kg + H nebo 84 kg + H . Jelikož nejtěžší možné závaží má hmotnost 12 kg, je evidentní, že rovnici lze doplnit pouze kombinací

$$3(12 + 9) = 4(8 + 6) + 7.$$

Tímto jsme určili hmotnost pěti z dvanácti závaží: $K = 12$ kg, $L = 9$ kg, $I = 8$ kg, $J = 6$ kg, $H = 7$ kg. Stále tedy máme k dispozici závaží o hmotnostech 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 10 kg a 11 kg.

Nyní se podíváme na páku $C - (D + E)$. Podmínku rovnováhy si opět můžeme vyjádřit rovnicí

$$C = 2D + 3E.$$

Zbylá závaží lze vybrat pouze dvěma způsoby, aby rovnost platila

$$\begin{array}{lll} C = 11 \text{ kg}, & D = 1 \text{ kg}, & E = 3 \text{ kg}, \\ C = 11 \text{ kg}, & D = 4 \text{ kg}, & E = 1 \text{ kg}. \end{array}$$

V obou případech musí být $C = 11$ kg a použijeme závaží o hmotnosti 1 kg.

Na páce $F - G$ rovnováhu zapíšeme

$$2F = G.$$

Ze zbylých závaží lze utvořit jen dvě přípustné kombinace 2 kg a 4 kg nebo 5 kg a 10 kg.

Podmínku rovnováhy na celé páce vystihneme rovnicí

$$6A + 4(C + D + E) = 2(H + I + J + K + L) + 6(F + G),$$

do které dosadíme známé číselné hodnoty a následně ji upravíme na tvar

$$3A + 2(D + E) = 20 + 3(F + G).$$

Pravá strana se bude rovnat 38 nebo 65, výraz $2(D + E)$ nabude 8 nebo 10, výraz $3A$ čísel 6, 9, 12, 15 nebo 30. Z uvedených hodnot (zejména z poměrně velkého rozdílu $2(D + E)$ a pravé strany rovnice) je jasné, že člen $3A$ musí nutně být 30, tedy $A = 10$ kg. Odtud plyne $F = 2$ kg a $G = 4$ kg. Tím následně získáme $D = 1$ kg a $E = 3$ kg. Zbývá nám již jen závaží 5 kg, které dosadíme na místo B .

Pokud chcete, můžete si pro kontrolu přepočítat všechny rovnosti a zkontrolovat, jestli jsme někde náhodou neudělali chybu ☺.

Tereza Uhlířová

teri@vyfuk.mff.cuni.cz

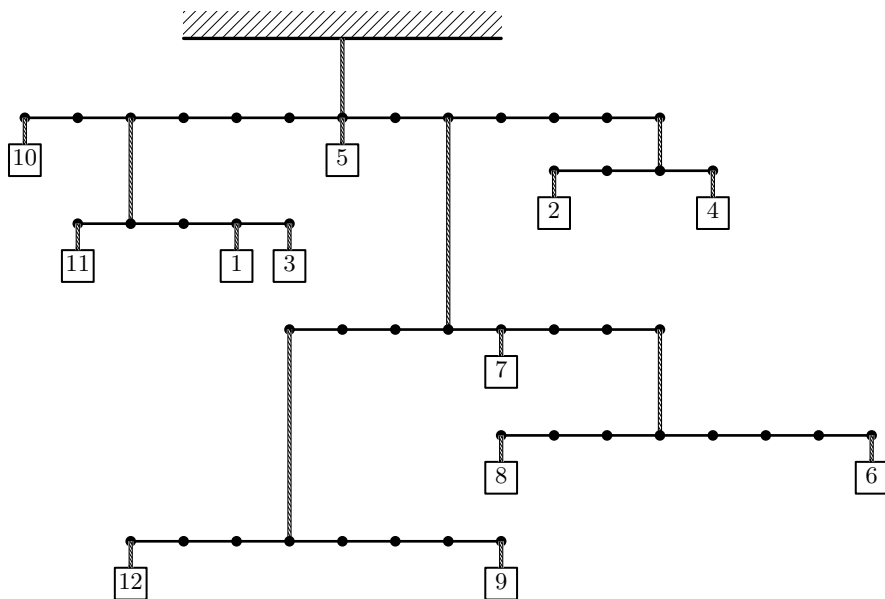
Lukáš Fusek

lukasf@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Most a válce

6 bodů; průměr 5,31; řešilo 68 studentů

Pokud se půjdete projít k modernímu železobetonovému mostu, můžete si všimnout, že s pilíři není vůbec propojen. Takový most totiž sedí na velkých ocelových válcích. Jakému jevu se tak konstruktéři brání? Pečlivě popište, co by se stalo, kdybychom místo použití válců most pevně zabudovali ke břehům. Spolu s řešením souvisejícího problému uveďte alespoň dva další příklady, kde se se stejným jevem setkáváme.



Obr. 4: Řešení úlohy, jednotlivé hmotnosti jsou v kg

Na úvod si môžeme položiť otázku, čo by sa stalo, keby bol most pevne pripevnený k pilierom? Veď kamenné mosty boli pripevnené pevne a niektoré stoja dodnes. V čom sa tak odlišujú súčasne železné a železobetónové mosty od ich kamenných predchodcov?

Rozhodujúca vlastnosť sa volá dĺžková tepelná rozťažnosť. Pre veľkú väčšinu materiálov platí, že pri zahriatí sa zväčší ich objem. Pre dlhý a úzky most je najvýraznejší práve prírastok v dĺžke. Zatiaľ čo kameň sa pri zmene teploty rozťahne len minimálne, kovy sa pri zmenách teploty rozťahujú podstatne viac. Metrová oceľová tyč sa pri zahriatí o $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ predĺži síce len o asi 1 mm, no 300 m dlhý oceľový most sa predĺži o 30 cm. A práve tento teplotný rozdiel je približne rozdiel teploty mostu v zime a v lete, keď na most celý deň svieti slnko.

Keby bol most pevne pripevnený k pilierom, pri výkyvoch teploty by na železnú konštrukciu, ale aj na piliere pôsobili tlakové a ťahové sily, ktoré by mohli spôsobiť deformáciu konštrukcie a popraskanie pilierov, v najhoršom prípade aj zničenie mostu.

Tepelná rozťažnosť ľuďom ale nespôsobuje len problémy. Dá sa využiť aj v prospech ľudí. Jedným z príkladov je jej využitie pri bimetalovom teplomere. Základ teplomeru tvorí prúžok zložený z dvoch rôznych kovov s rôznou tepelnou rozťažnosťou. Pri zmene teploty sa vplyvom tepelnej rozťažnosti rôzne kovy rozťahnu o rôznu vzdialenosť. Preto sa prúžok zakriví, čo sa jednoducho prenesie na ručičku, ktorá



Obr. 5: Dilatačný (voľný) spoj na koľajnici neďaleko železného mostu

ukazuje teplotu. Tento typ teplomeru sa používa napríklad v kuchyni na meranie teploty mäsa.

Ďalším podobným prístrojom je aj termostat. Tento prístroj vnútorne funguje na obdobnom princípe, ale s tým rozdielom, že pri prekročení istej teploty sa vodivo zopne a umožní prechod elektrického prúdu prístrojom. Tým ovláda iné zariadenia: klimatizáciu, kúrenie⁸, ...

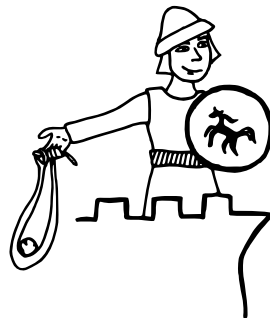
Michal Červeňák

miso@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Problémy práčete

9 bodů; průměr 6,45; řešilo 47 studentů

Lukáš má rád středověk. Kdyby žil ve 13. století, určitě by se stal práčetem, středověkým bojovníkem s prakem. A jak se s takovým prakem ve středověku zacházelo? Na konec praku s délkou ramene $r = 80$ cm se umístil kámen s hmotností $m = 600$ g a práce ho nad hlavou roztočilo na frekvenci $f = 200$ ot·min⁻¹ (otáček za minutu). Nakonec se škubnutím kámen z praku uvolnil a práce mohlo sledovat, zda-li zasáhne cíl.



1. Jaká je úhlová rychlost ω praku? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.
2. Jakou rychlostí v_0 se pohybuje kámen těsně po „výstřelu“ z praku?
3. Šikovní práce vystřelilo kámen ve vodorovném směru rychlostí v_0 . Do jaké vzdálenosti x kámen doletí, pokud se v momentě výstřelu kámen nacházel ve výšce $h = 2$ m?
4. Rameno, ze kterého je prak vyroben, lze napínat maximální silou $F_m = 700$ N. Práce se leklo, zda-li odstředivá síla kamene při střelení není příliš velká. Pomozte mu a vypočítejte, na jakou úhlovou rychlost ω_m lze kámen roztočit, aby to prak ještě vydržel. Poté vypočítejte maximální vzdálenost x_m , do které je prak schopen dostřelit za podmínek jako v předešlém úkolu.

Nejprve si sepíšeme vše, co známe, a převedeme na základní jednotky (přičemž otáčky za minutu převedeme na otáčky za sekundu, neboli Hz)

$$r = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m},$$

$$m = 600 \text{ g} = 0,6 \text{ kg},$$

$$f = 200 \text{ ot} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{200 \text{ ot}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{3} \text{ Hz},$$

$$F_m = 700 \text{ N},$$

$$h = 2 \text{ m}.$$

1. Frekvence f je fyzikální veličina, která sama o sobě vyjadřuje, kolikrát se daný děj zopakuje za jednotku času. Podle definice platí

$$f = \frac{1}{T},$$

⁸česky vytápění

kde perioda T je doba trvání daného děje. Na druhou stranu *úhlová rychlost* ω vyjadřuje, jak rychle se mění úhel s časem u pohybu po kružnici. Můžeme ji chápat jako ekvivalent rychlosti u přímočarého pohybu, která vyjadřuje, jak rychle se mění uražená dráha s časem. Uvažujeme-li takto, není problém si odvodit, že jednotka úhlové rychlosti je jednotka úhlu za sekundu. Protože pracujeme s radiány, uvažujeme jednotku úhlové rychlosti jako $[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Nyní se zamysleme. Jedna otáčka, neboli plný úhel (tedy úhel $2\pi \text{rad}$), trvá čas T . Rychlost, s jakou se provede plná otáčka, bude poté v analogii s již zmiňovanou (a vám doufejme dobře známou) rychlostí přímočarého pohybu

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Máme téměř hotovo, ale proč jsme vlastně na začátku zmiňovali frekvenci? Protože s úhlovou rychlostí úzce souvisí. Jsme totiž schopni najít vztah dávající do souvislosti frekvenci děje s jeho úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f.$$

Dosazením dostáváme

$$\omega = 2\pi f = \left(2\pi \text{ rad} \cdot \frac{10}{3} \text{ s}^{-1}\right) = 20,94 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hledaná úhlová rychlost praku je $20,94 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. Představme si, jak se lano praku postupně otáčí kolem ruky přáčeté. Všechny body lana se pak pohybují *stejnou úhlovou rychlostí*. Ovšem jistě z vlastní zkušenosti víte, že kdyby vás práce kamenem na konci lana praštilo, tak při kratším lanu by rána bolela méně než při delším. To je způsobeno *rozdílnou obvodovou rychlostí* bodů lana. Tento rozpor vzniká z toho, že vzdálenější body se pohybují po kružnicích o větším poloměru a na rozdíl od bližších bodů musejí za stejný časový interval urazit delší dráhu. Intuitivně tak odvodíme, že taková obvodová rychlost bude záviset přímo úměrně na úhlové rychlosti pohybu soustavy a také na vzdálenosti od osy otáčení (jinak si můžete rozmyslet řádný důkaz třeba přes zmíněné délky oblouků). Symbolicky tento vztah můžeme zapsat jako

$$v = \omega r.$$

Nyní, jestliže se zajímáme o rychlost kamene těsně po výstřelu z praku, budeme počítat právě onu obvodovou rychlost kamene, neboť předpokládáme, že se v tak krátkém okamžiku po vypuštění jeho rychlost nesníží.

$$v_0 = \omega r = 2\pi f r = \left(2\pi \text{ rad} \cdot \frac{10}{3} \text{ s}^{-1} \cdot 0,8 \text{ m}\right) = 16,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Všimněme si, že zde se radiány jaksí „ztrácejí“. Je to díky definici radiánu, která zaručuje, že figurují jako konstanta, tzn. úhel v radiánech násobený délkou je ve výsledku opět délka. Odpověď na otázku rychlosti kamene těsně po výstřelu z praku je tedy $16,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. V této části budeme zanedbávat odpor vzduchu. Za této podmínky se podle principu tzv. *superpozice*⁹ horizontální složka okamžité rychlosti v_0 (složka vodorovná se zemí) se nebude měnit po celou dobu letu. Ve vodorovném směru na kámen nepůsobí žádné síly, tzn. podle prvního Newtonova zákona zde není nic, co by tuto složku rychlosti měnilo. Vzdálenost, do níž kámen doletí, bude poté jednoduše $x = v_0 t_v$, kde t_v je doba vrhu. Rychlost v_0 známe, pro určení doby letu využijeme opět principu superpozice. Doba letu kamene bude to samé, jako doba volného pádu z dané výšky dvou metrů (zde působí síla gravitační). Pro volný pád z nulové vertikální složky rychlosti platí vztah pro pohyb rovnoměrně zrychlený tíhovým zrychlením.

$$h = \frac{1}{2} g t_v^2 \quad \Rightarrow \quad t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za t_v si dosadíme do vztahu pro vzdálenost

$$x = v_0 t_v = \left(2\pi f r \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) = 16,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 10,70 \text{ m}.$$

Vystřelí-li práce kámen vodorovně se zemí ve výšce 2 m, doletí do vzdálenosti 10,70 m.

4. Síla, která působí na těleso pohybující se po kružnici, je závislá na tom, jak rychle se těleso otáčí. O tom se můžeme přesvědčit například cvičební pomůckou Power[®] Ball, která je na tomto principu založena (dalším ukázkovým příkladem je právě závaží na provázku, třeba prak). Čím rychleji točíme, tím náročnější je udržet Power[®] Ball v ruce. Na kámen ve vztahné soustavě s ním spojené působí odstředivá síla, která je kompenzována reakcí provázku. Máme zadáno, že maximální velikost této reakce, kterou je schopno rameno praku „přežít“ je $F_m = 700 \text{ N}$. Stav, který nás zajímá, je chvíle, kdy mají odstředivá síla s reakcí stejnou velikost, tzn. $F_m = F_o$. Pro odstředivou sílu platí vztah

$$F_o = m \frac{v^2}{r},$$

kde v je tečná rychlost kamene a r je délka ramene, na němž kámen rotuje. Máme-li však dle zadání pracovat s maximální možnou úhlovou rychlostí ω_m , musíme vztah pro odstředivou sílu přepsat pomocí již zmíněného vztahu $v = \omega r$ na tvar

$$F_m = m \omega_m^2 r.$$

Nyní již můžeme jednoduše vyjádřit ω_m

$$\omega_m^2 = \sqrt{\frac{F_m}{mr}} = \sqrt{\frac{700 \text{ N}}{0,6 \text{ kg} \cdot 0,8 \text{ m}}} = 38,19 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

⁹Princip, který v této situaci říká, že padání kamene si můžeme rozložit (a taky rozložíme) na dva pohyby – jeden přímočarý ve směru vystřelení a druhý bude volný pád. Když tyto pohyby složíme, dostaneme reálnou trajektorii padajícího kamene, což je v prostředí bez odporu část paraboly, zatímco v atmosféře křivka, která se nazývá balistická.

Poslední otázka se týká toho, jak se tato úhlová rychlost projeví na doletu kamene po výstřelu z praku. Pro vzdálenost x_m si „půjčíme“ již odvozený vztah z druhé části.

$$\begin{aligned} x_m &= \omega_m r \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{F_m}{mr}} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2F_m h}{mrg}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 700 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}}{0,6 \text{ kg} \cdot 0,8 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}} = 19,51 \text{ m}. \end{aligned}$$

Odpovědi v poslední části jsou tedy následující. Maximální přípustná úhlová rychlost praku je $\omega_m = 38,19 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, přičemž při této úhlové rychlosti kámen doletí do vzdálenosti $x_m = 19,51 \text{ m}$.

Tomáš Kremel

tomask@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Podivné nůžky

8 bodů; průměr 6,11; řešilo 38 studentů

Lada nedávno přemýšlela nad následujícím problémem. Chtěla zjistit, kde se nachází těžiště nůžek, které jsou rozevřeny na 30° . Místo zdlouhavého počítání se na to rozhodla přijít experimentálně.

Pomozte Ladě a zkuste najít těžiště nůžek a to pro alespoň 4 úhly jejich pootevření. Pro každý úhel změřte vzdálenost mezi těžištěm a středem nůžek.¹⁰ Následně vynesete naměřené hodnoty do grafu závislosti vzdálenosti těžiště na úhlu pootevření. Svůj postup nezapomeňte rádně okomentovat.

Poznámka: Úhel pootevření můžete zafixovat malým (zanedbatelným) množstvím izolepy.

Jistě by všichni z vás bez problémů zvládli určit polohu těžiště nepravidelného obrazce. Stačilo by obrazec zavěsit postupně za několik bodů a současně ze stejných míst spustit nit zatíženou závažím. Tím se zjistí poloha těžnic a jejich průsečík udává těžiště. Nůžky jsou sice o něco složitější předmět, než je pouhý plochý obrazec, nicméně s trochou šikovností můžeme postupovat analogicky.

Pro tento experiment je výhodné vybrat nějaké symetrické nůžky, protože pak s jistotou víme, že těžiště leží na ose symetrie a stačí nám určit pouze jednu souřadnici těžiště. Dále musíme zvolit vhodnou měřicí aparaturu a postup, který nám maximalizuje přesnost měření. Jednou z možností je například tato: Nůžky rozevřeme na požadovaný úhel, zafixujeme izolepou a velmi schematicky je obkreslíme na papír (stačí pár vodících bodů nebo čar) včetně osy symetrie. Poté nůžky zavěsíme za tenkou nit na nástěnku a připícheme za ně papír s nákresem tak, aby odpovídal aktuální poloze nůžek. Ze stejného bodu, jako visí nůžky, spustíme také nit se závažím (představující svislici) a poznačíme si místo, kde nit protne zakreslenou osu symetrie (druhou kolmicí).

Takto jsme zjistili polohu těžiště a nyní nám už zbývá jen určit polohu středu nůžek. To snadno uděláme tak, že opatrně zatlačíme na středový čep, čímž se nám obtiskne na papír. Sundáme-li papír z nástěnky, jednoduše můžeme změřit vzdálenost těžiště od středu nůžek.

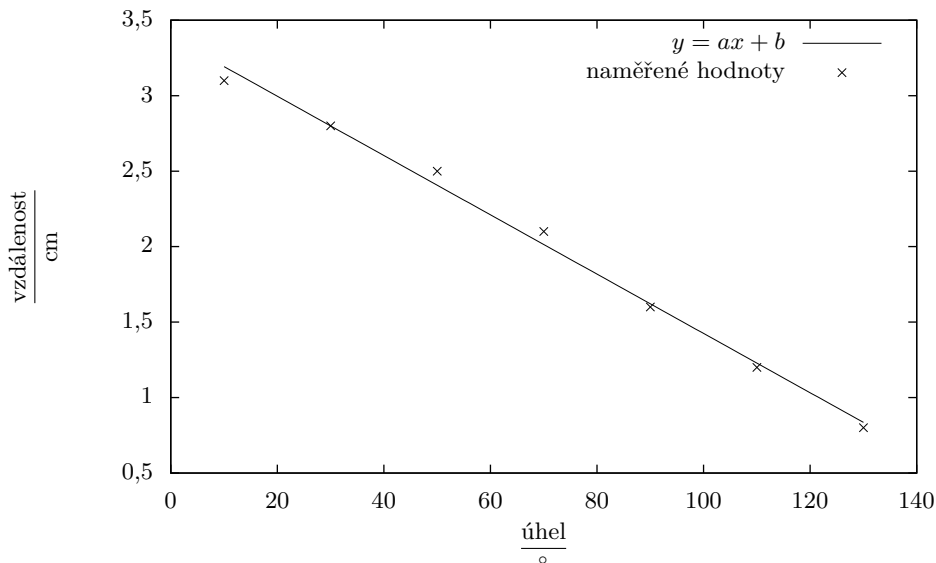
Z naměřených hodnot je zřejmé, že mezi úhlem rozevření nůžek a vzdáleností těžiště od středu je nepřímá úměra.¹¹ To je dobře patrné, sestrojíme-li graf závislosti obou hodnot. Všim-

¹⁰To je to místo, kde jsou ramena nůžek spojena.

¹¹Ve skutečnosti však závislost těchto dvou veličin nepředstavuje přímka, ale část grafu funkce $\cos x$, která se pro měřené úhly přímce velmi podobá.

úhel rozevření	10°	30°	50°	70°	90°	110°	130°
$\frac{\text{vzdálenost}}{\text{cm}}$	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6	1,2	0,8

Tabulka 1: Výsledky měření



Obr. 6: Graf závislosti polohy těžiště na úhlu rozevření

něte si, že grafem proložená přímka protíná téměř všechny vynesené body, což nám ukazuje, že naše měření bylo poměrně přesné. Programy pro vykreslování grafů (např. Excel) vám dokáží i číselně určit chybu takového měření, abyste věděli, na kolik jistí si můžete být uvedeným výsledkem. Třeba v našem případě je chyba parametrů rovnice přímky, kterou jsme graf proložili, $a = 3,5\%$, $b = 1,7\%$.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.C ... Zákon zachování zimy

9 bodů; průměr 2,95; řešilo 39 studentů

1. Jednoho chladného pondělí sněžilo natolik, že to Tomovi zaspalo dům. Vytáhl tedy ze sklepa lopatu na sníh a pustil se do práce. Odhazování sněhu vykonával tak, že sníh po-debral lopatou, zvedl ho do nezanedbatelné výšky a rovnoměrnou rychlostí ho přenesl k hluboké jámě, kde ho vysypal. Jak se při takovém procesu mění kinetická, potenci-

ální a mechanická energie nabraného sněhu? Zkuste to co nejpřesněji zakreslit do grafů závislých na čase. Všechny potřebné hodnoty přibližně odhadněte.

2. Paťo rád sáňkuje. Tentokrát ale svou jízdu neubrzdil a zastavil až ve středu zamrzlého jezera. Led byl velmi kluzký a rozhýbat se na něm by bylo opravdu náročné. Naštěstí má Paťo s sebou dělo na sněhové koule. Kromě samotného děla má k dispozici dvě koule o hmotnostech $m_1 = 1 \text{ kg}$ a $m_2 = 2 \text{ kg}$. Jeho dilema nyní spočívá v tom, že se nedokáže rozhodnout, jakým způsobem vystřelení koulí za sebe získá nejvyšší rychlost. Dělo dokáže střílet maximální rychlostí $v = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a hmotnost Paťova děla a saní je dohromady $M = 80 \text{ kg}$.
 - a) Který způsob je neúčinnější, když dělo vystřelí obě koule naráz, nebo když vystřelí nejdříve těžší a poté lehčí, nebo naopak? Jaké nejvyšší rychlosti bude poté Paťo schopen dosáhnout?
 - b) Ani tak kluzký led není dokonale hladký, a tak se Paťo časem na jezere vlivem tření znovu zastaví. Kolik tepla led přijme po dobu Paťova pohybu mezi prvním a druhým zastavením?
3. Krasobruslař Petr si všiml, že když se snaží dělat piruetu s rozpaženýma rukama, tak je schopný udělat přibližně 14 otáček za 6 sekund. Jeho moment setrvačnosti je v té chvíli $J = 0,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Když však připaží ruky k tělu, svůj moment setrvačnosti zmenší o $\Delta J = 0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Kolik otáček udělá Petr s připaženýma rukama za 10 sekund?

1. Odklizení sněhu

Stanovme nejdříve dvě potřebné veličiny. Hmotnost sněhu, který zvedá Tom, nechť je $m = 10 \text{ kg}$. Za hodnotu tíhového zrychlení berme $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Tom při odhazování nejdříve podobere snůh lopatou, vyzvedne ho do nějaké výšky, přenese k jámě a tam ho vysype. Tento pohyb má tedy 3 logické části. Je důležité zmínit, že na začátku, na konci a mezi těmito částmi je rychlost a kinetická energie sněhu vždy na velmi krátkou dobu nulová. V první a druhé části koná snůh rovnoměrný přímočarý pohyb, ve třetí pak rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g .

Během zvedání do výšky, řekněme $h_1 = 1 \text{ m}$, tento snůh nabývá kinetickou energii E_{k1} , protože se pohybuje rychlostí, $v_1 = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Její velikost je

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \cdot (0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = 1,25 \text{ J}.$$

Předpokládáme-li, že rychlost zvedání se nemění, tato energie je po čas této fáze konstantní.

Naopak potenciální energie se postupně mění z nulové hodnoty¹² na hodnotu

$$E_{p1} = mgh_1 = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 1 \text{ m} = 98,1 \text{ J}.$$

Všimněme si, že potenciální energie je několikrát větší než kinetická.

Mechanická energie E se vždy rovná součtu kinetické a potenciální energie. V tomto případě tedy bude růst z hodnoty E_{k1} do hodnoty $E_{k1} + E_{p1} = 99,35 \text{ J}$.

¹²Nulovou hladinu potenciální energie lze volit úplně libovolně. My jsme si ji zvolili v nulové výšce, tj. na zemi, neboť s touto přirozenou volbou se dobře počítá. Například v atomové fyzice je zase výhodné zvolit nulovou hladinu potenciální energie v nekonečné vzdálenosti od atomového jádra.

Nakonec si spočteme ještě čas t_1 tohoto děje

$$t_1 = \frac{h_1}{v_1} = \frac{1 \text{ m}}{0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = 2 \text{ s}.$$

Po vyzvednutí Tom nese sněh k jámě rychlostí $v_2 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Toto přenášení at trvá čas $t_2 = 4 \text{ s}$. Potenciální energie sněhu se prakticky nemění¹³ a je po tento čas rovna E_{p1} .

Kinetická energie bude stejně jako minule

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \cdot (1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = 5 \text{ J}.$$

Mechanická energie bude rovněž konstantní a rovna $E_{k2} + E_{p1} = 103,1 \text{ J}$.

Nakonec se Tom velmi krátce zastavil u hluboké jámy (kinetická energie nulová) o hloubce $h_3 = -2 \text{ m}$ a vysypal do ní sněh. Ten začal padat volným pádem do jámy. Musel padat po dobu $t_3 = 0,8 \text{ s}$. Při tomto ději se rovnoměrně zvyšuje rychlost sněhu,¹⁴ tj. kinetická energie stoupá z nuly jako funkce $y(x) = x^2$, to proto, že kinetická energie je závislá rovněž na druhé mocnině rychlosti.

Nyní se zamysleme nad potenciální energií. Při volném pádu působí na sněh pouze tíhová síla, tedy síla, která je zodpovědná za samotnou existenci potenciální energie. Jak již jistě tušíte, znamená to, že soustava sněh – Země je *izolovaný systém* a platí v něm, že mechanická energie se nemění.

Potenciální energie bude tedy doplněk kinetické energie do hodnoty, která byla na začátku tohoto děje, tj. E_{p1} . Parabolicky „obráčené“ bude klesat z této hodnoty na hodnotu na dně jámy

$$E_{p3} = mgh_3 = 10 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (-2 \text{ m}) = -196,2 \text{ J}.$$

Jak vidíme, na dně jámy je potenciální energie dokonce záporná. Úplně na konec poznamenejme, že sněh bude mít těsně před dopadem největší kinetickou energii, kterou v momentě dopadu ztratí (sněh se po dopadu do jámy nepohybuje). Tato energie se ztratí třením, deformací kupy sněhu a podobně.

Nyní zakresleme všechny průběhy do grafu.

Na plný počet bodů nebylo potřeba odhadovat a počítat konkrétní hodnoty. Ty jsou tady zejména pro zdůraznění rozdílů mezi velikostmi kinetické a potenciální energie. Důležité ale je, aby byly průběhy všech energií realistické, tj. (ne)rovnoměrné stoupání, klesání apod.

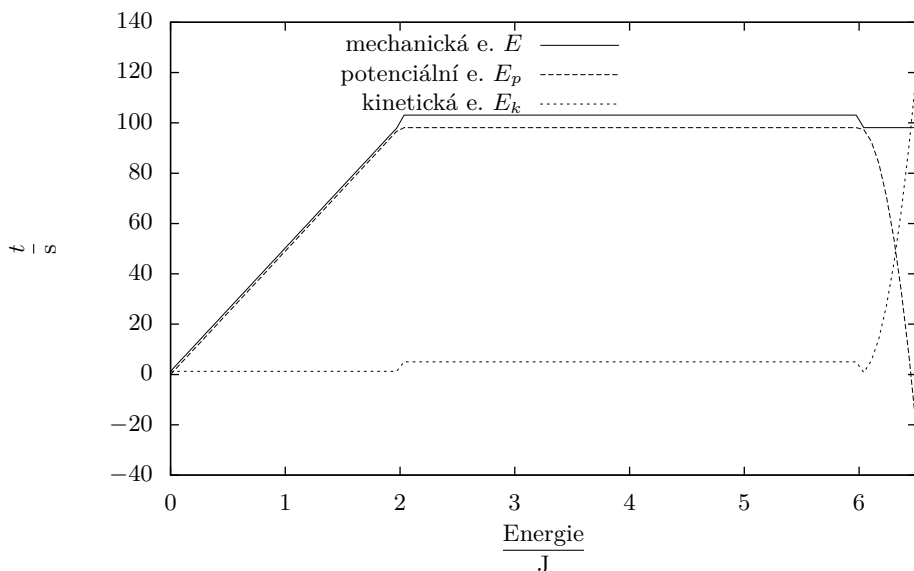
2. Paťo a sáňky

Při této úloze využijeme zákona zachování hybnosti, o kterém jsme pojednávali ve druhé kapitole Výfučení.

- a) Uvažme, že Paťo hází koule ve vodorovném směru. Poněvadž v tomto směru na Paťa s koulí a saněmi nepůsobí žádná síla, platí zákon zachování hybnosti. Ten říká, že velikost hybnosti odhozených koulí se musí rovnat velikosti hybnosti Paťa, který se bude pohybovat opačným směrem. Sice to není na první pohled zřejmé, ale záleží i na pořadí vystřelení koulí. Proberme si tedy postupně všechny tři možnosti.

¹³Zanedbáme-li malé změny výšky při kráčení.

¹⁴Zrychlení (i tíhové) určuje, o kolik $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ se změní rychlost za sekundu. Poněvadž je ale g konstantní, rovnoměrný musí být i nárůst rychlosti.



Vystřelí-li obě koule současně, budou se vzhledem k zemi pohybovat rychlostí v . Velikost hybnosti koulí $p = (m_1 + m_2)v$ se pak musí rovnat velikosti hybnosti Paťa a saní. Tedy

$$Mv_1 = (m_1 + m_2)v,$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{M}v = \frac{1 \text{ kg} + 2 \text{ kg}}{80 \text{ kg}} 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Teď uvažujme, že Paťa nejdřív vystřelí jenom jednu z koulí, je jedno kterou. Vyberme si tedy kouli o hmotnosti m_1 . Hybnost jediné koule m_1v bude určitě menší než p a tedy i rychlost Paťa bude menší než v_1 . Tuto rychlost si označme v_2 . Paťa při této rychlosti vystřelí i druhou, zbylou kouli. Její rychlost vůči zemi ale už nebude v , nýbrž $v - v_2$. Tím pádem bude i její hybnost jen $m_2(v - v_2)$. Celkový „zpětný ráz“ koulí bude

$$m_1v + m_2(v - v_2) < (m_1 + m_2)v.$$

Jelikož vytvořená hybnost by byla menší, než by tomu bylo při současném vystřelení obou koulí, Paťa by získal menší rychlost. Paťa má tedy vystřelit obě koule současně.

b) Nyní se Paťa pohybuje rychlostí v_1 , tedy jeho kinetická energie je

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ kg} \cdot (0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 = 22,5 \text{ J}.$$

Jelikož se Paťa zastaví (jeho kinetická energie bude nulová), musí nutně docházet ke ztrátám této energie, resp. její nežádoucí přeměně. Energie se bude třením měnit na teplo a zahřívát led a dolní část Paťových saní. Tepelnou výměnou si ale led „vezme“ i (téměř všechno) teplo ze saní. Do momentu zastavení tedy přijme veškerou kinetickou energii, tj. $Q = E_k$.

Jště bychom mohli namítat, že nějaké ztráty způsobí i např. odpor vzduchu. Jeho vliv je ale při rychlosti v_1 zanedbatelný.

Krasobruslař

Zde využijeme znalosti zákona zachování momentu setrvačnosti. Ze známých hodnot můžeme vypočítat Petrův moment setrvačnosti poté, co připaží ruce k tělu.

$$J_1 = J - \Delta J = 0,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 - 0,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 0,7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 .$$

Dále využijeme zmiňovaného zákona zachování: na Petra působí jenom tíhová síla, tření bruslí o led zanedbejme.¹⁵ Tíhová síla ale působí přímo v ose otáčení, tedy její moment bude

$$M = F_g \cdot 0 \text{ m} = 0 \text{ N}\cdot\text{m} .$$

Na Petra tedy nepůsobí žádný vnější moment síly, proto můžeme psát

$$\begin{aligned} L &= L_1 , \\ J\omega &= J_1\omega_1 . \end{aligned}$$

Za úhlové rychlosti si dosadíme výraz $2\pi f$, což je pouze jiný zápis pro ω

$$\begin{aligned} J \cdot 2\pi f &= J_1 \cdot 2\pi f_1 , \\ f_1 &= \frac{J}{J_1} f = \frac{0,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{0,7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} \cdot \frac{14 \text{ ot}}{6 \text{ s}} = 3 \text{ ot}\cdot\text{s}^{-1} . \end{aligned}$$

Za 10 sekund Petr udělá logicky i 10-krát více otáček: Petr s připravenými rukama udělá za 10 sekund 30 otáček.

Poznámky k došlým řešením

V prvej časti príkladu ste poväčšinou dobre zvládli kreslenie grafov po moment, kedy Tom začína púšťať sneh do diery. Neuvedomili ste si totiž, že akonáhle sneh padá voľným pádom do diery, tak potenciálna energia neklesá lineárne, ale kvadraticky od času (čiže namiesto rovnej čiary v grafe, to bude čiara krivšia). Tento fakt sa dá spozorovať napríklad z toho, že aktuálnu výšku snehu od času by sme počítali ako $h(t) = H - gt^2/2$. Keďže mechanická energia sa musí zachovávať, tak kinetická energia začne od momentu pádu snehu kvadraticky rásť v závislosti od času

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2 .$$

V druhej časti som sa pri opravovaní najviac stretol s tým, že ste to celé počítali cez energie. Vypočítali ste energiu letiacich gúľ a jednoducho prehlásili, že takú istú energiu bude mať aj Pačo. Toto tvrdenie ale predsa z ničoho nevyplýva. Zákon zachovania energie hovorí predsa iba to, že hodnota celkovej energie je stále rovnaká. Čiže neplatí nič ako „rovnosť energií v opačných smeroch“. Ďalej som body strhával ešte za to, keď nebola dostatočná argumentácia k tvrdeniu, že po hodení oboch gúľ pôjde Pačo najrýchlejšie.

No a v tretej časti obrovská väčšina rišiteľov predpokladala, že sa zachováva energia a tým pádom Petr urobí o niečo viac otáčok. To však nie je pravda. Petr predsa počas pripažovania rúk koná prácu proti odstredivej sile. Touto prácou zvyšuje svoju rotačnú energiu. To znamená, že veličina, ktorá sa reálne zachováva je práve *moment hybnosti*. V konečnom dôsledku Petr urobí (vďaka vzniknutej energii) ešte o niečo viacej otáčok, než ste vy vypočítali.

¹⁵Ve skutečnosti je tření pro krasobruslaře velmi důležité, třením např. brzdí. Při uvažovaném otáčení bude ale moment třecích sil zanedbatelný, protože třecí síly budou působit blízko osy otáčení.

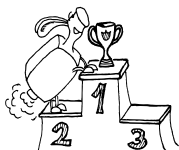
Mojou radou do budoucnosti bude to, aby ste pri používaní zákona zachovania energie pozorne sledovali, či sa náhodou energia nestráca, alebo či nejako nepribúda.

Jakub Bahyl

kubo@vyfuk.mff.cuni.cz

Marek Otýpka

marek@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	6	9	8	9	41	100	162
1. <i>Kryštof Pravda</i>	ZŠ Brána jazyků Praha	4	–	5	6	–	–	15	67	78
2. <i>Klára Čížová</i>	ZŠ, Horní Lideč	4	4	6	6	–	–	20	79	53
3. <i>Michal Petrůj</i>	ZŠ, Horní Lideč	–	1	4	–	–	–	5	71	24
4. <i>Marek Dořák</i>	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	71	22
5. <i>David Mareček</i>	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	63	12
6. <i>Bartoloměj Pecháček</i>	Církevní G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	92	11
7. <i>Radim Maček</i>	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	100	4

Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	6	9	8	9	41	100	162
1. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	4	5	6	9	7	5	36	88	143
2. <i>Vít Gardoň</i>	G, Komenského, Příbram	4	5	6	9	5	4	33	66	107
3. <i>Luboš Gardoň</i>	G, Komenského, Příbram	4	5	6	9	6	4	34	65	105
4. <i>Lucka Hosová</i>	G, Špitálská, Praha	3	1	6	–	–	–	10	76	96
5. <i>Jindřich Hátle</i>	ZŠ Amálská, Kladno	4	–	6	5	6	0	21	66	95
6. <i>Jakub Janků</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	5	6	4	6	4	28	78	89
7. <i>Rudolf Líbal</i>	G Christiana Dopplera, Praha	4	3	6	8	5	4	30	53	86
8. <i>Filip Wagner</i>	G, Tišnov	3	2	5	–	7	4	21	57	82
9. <i>Jana Sládková</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	4	–	6	–	6	–	16	85	52
10.–12. <i>Ondřej Brož</i>	G Christiana Dopplera, Praha	1	1	1	0	2	0	5	25	40
10.–12. <i>Oldřich Čihák</i>	ZŠ Příbram VI - Březové Hory	1	–	6	0	3	0	10	31	40
10.–12. <i>Lucie Vomelová</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	80	40
13. <i>Adam Kolomazník</i>	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10 - Stra	4	3	5	–	–	–	12	61	38
14. <i>Ondřej Macháč</i>	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	52	37
15. <i>Viktor Rychlík</i>	ZŠ Tuchlovice	–	2	5	–	–	–	7	61	35
16. <i>Anna Koubová</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	79	31
17. <i>Martina Petrůjová</i>	ZŠ Brumov - Bylnice	3	3	–	0	–	–	6	53	26
18.–19. <i>Vít Kučera</i>	1. ZŠ TGM Milevsko	–	–	6	–	–	–	6	96	25
18.–19. <i>Michaela Svatošová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	64	25
20. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	77	24
21. <i>Roman Varfolomiliev</i>	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	4	–	6	–	–	0	10	34	23
22. <i>Miroslav Šafář</i>	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	–	–	–	–	–	–	88	15
23. <i>Kateřina Bartošová</i>	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	–	–	–	–	–	–	–	61	14
24. <i>Marta Stehlíková</i>	Masarykova ZŠ, Ždánice	–	–	–	–	–	–	–	76	13

jméno	škola	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	6	9	8	9	41	100	162
25. <i>Sára-Anna Borzová</i>		-	-	-	-	-	-	-	73	11
26.–28. <i>Jakub Friedrich</i>	G, Omská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	100	9
26.–28. <i>Martin Hyna</i>	G, Vlašim	-	1	-	-	-	-	1	36	9
26.–28. <i>Stanislava Košáková</i>	ZŠ Strakonice, Dukelská	-	-	-	-	-	-	-	75	9
29. <i>Linda Šindelářová</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	-	-	-	-	-	-	-	80	8
30. <i>Štěpán Chrástský</i>	Biskupské G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	100	5
31. <i>Zdravko Načev</i>	ZŠ Brno - Bystrc	-	-	-	-	-	-	-	67	2

Kategorie osmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	6	9	8	9	41	100	162
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	4	5	6	8	7	4	34	86	140
2. <i>Erik Kočandrle</i>	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	4	5	6	9	7	7	38	85	138
3. <i>Ladislav Trnka</i>	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	1	5	6	9	7	4	32	83	135
4. <i>Josef Minařík</i>	ZŠ sídl. Osвобоzení, Vyškov	4	5	6	6	6	7	34	82	129
5. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	4	5	6	8	7	5	35	79	128
6. <i>Michal Matoulek</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	5	6	9	7	6	36	80	122
7. <i>Václav Brož</i>	G Christiana Dopplera, Praha	4	5	6	7	8	3	33	78	113
8. <i>Filip Vabroušek</i>	ZákŠ Komenského I Zlín	3	1	6	9	8	1	28	68	110
9. <i>Josef Sabol</i>	G, Chotěboř	4	5	6	6	7	2	30	72	107
10. <i>Jiří Blaha</i>	G Uherské Hradiště	4	5	-	9	-	-	18	89	86
11. <i>Martin Mráz</i>	G, Český Krumlov	4	3	6	-	3	-	16	63	75
12. <i>Jakub Sochor</i>	G, Blovice	4	3	6	6	-	2	21	70	71
13. <i>Lucie Hercíková</i>	G O. Březiny a SOŠ, Telč	4	5	6	6	6	-	27	69	66
14. <i>Jan Bubeníček</i>	G B. Němcové, HK	4	5	0	-	-	-	9	67	63
15. <i>Jindřich Dušek</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	1	4	2	-	1	10	42	58
16. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	4	3	6	4	5	-	22	60	53
17. <i>Nikola Bartková</i>	G, Olomouc – Hejčín	4	-	5	8	-	2	19	70	50
18. <i>Tomáš Večeřa</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	4	5	6	-	-	-	15	79	44
19. <i>Tomáš Kubíček</i>	Jiráskovo G, Náchod	1	-	6	-	-	0	7	49	40
20. <i>Natálie Míkerásková</i>	Masarykovo G, Příbor	4	5	-	-	4	-	13	48	39
21. <i>Luboš Bartík</i>	G a SOŠZZE Vyškov	-	-	-	-	-	-	-	86	36
22. <i>Hynek Prát</i>	ZŠ a MŠ Mikulčice	-	-	-	-	-	-	-	79	34
23. <i>Jakub Komárek</i>	G Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	63	29
24. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	-	-	-	-	-	-	-	37	27
25. <i>Martin Klíš</i>	ZŠ, Horní Lideč	-	1	4	-	-	-	5	52	25
26. <i>Vratislav Blažek</i>	G, Benešov	4	3	6	-	-	-	13	60	24
27.–29. <i>David Hudák</i>	ZŠ a MŠ Orechov	-	-	4	2	-	-	6	56	23
27.–29. <i>Martin Kadlec</i>	ZŠ JAK, Karlovy vary	4	-	4	-	-	-	8	66	23
27.–29. <i>Tomáš Maňásek</i>	ZŠ Mánesova Otrokovice	-	-	-	-	-	-	-	68	23
30. <i>Ludmila Hlávková</i>	ZŠ Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	78	21
31.–32. <i>Daniél Friedřich</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	3	1	5	2	6	2	19	46	19
31.–32. <i>Lukáš Kristek</i>	ZŠ náměstí 28. října, Tišnov	-	-	-	-	-	-	-	48	19
33.–34. <i>Zbyněk Nečas</i>	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	-	1	6	-	-	-	7	59	16
33.–34. <i>Petr Zápalka</i>	Masarykovo G, Vsetín	-	-	-	-	-	-	-	64	16
35. <i>Klára Heimlichová</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	-	-	-	-	-	-	-	60	15
36.–37. <i>Martin Perníca</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	-	-	-	-	-	-	-	93	14
36.–37. <i>Ivana Vondrušková</i>	G, Jeseník	-	-	-	-	-	-	-	61	14
38. <i>Hana Stará</i>	ZŠ a MŠ Zákupy	-	-	-	-	-	-	-	25	12
39. <i>Gabriela Ducháčková</i>	ZŠ, Horní Lideč	-	-	-	-	-	-	-	92	11

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
		4	5	6	9	8	9			
40.–41. Marek Božoň	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	5	–	–	–	5	56	10
40.–41. Martin Motejlek	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	6	–	–	–	6	100	10
42.–45. Ondřej Huvar	Masarykovo G, Příbor	–	–	–	–	–	–	–	89	8
42.–45. Ondřej Kocourek	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	62	8
42.–45. Monika Machalová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	89	8
42.–45. Eliška Rotterová	G a JŠ, Břeclav	–	–	–	–	–	–	–	67	8
46.–47. Olena Karabanová	ZŠ Karolíny Světlé, Sadská	–	–	–	–	–	–	–	54	7
46.–47. Marek Novosad	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	100	7
48.–49. Kristýna Paulusová	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	13	5
48.–49. David Tyl	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	83	5
50. Nela Prokúpková	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzuluc- ká	–	–	–	–	–	–	–	100	4
51. Veronika Přikrylová	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	60	3
52. Adéla Seidelmannová	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	–	–	–	–	–	–	–	50	2
53. Iva Bublíková	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	25	1

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	E	C	IV	%	Σ
		4	5	6	9	8	9			
1. Jan Preiss	G, Lovosice	4	5	6	9	8	6	38	92	149
2. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	4	5	6	9	7	5	36	86	140
3. David Němec	G, Tanvald	4	5	6	9	8	4	36	85	138
4. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	5	6	8	5	8	36	79	128
5. Jiří Vala	G, Mikulov	4	5	6	9	8	4	36	77	124
6. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	1	5	6	3	7	4	26	75	121
7. Radka Janků	G, Ostrov	4	5	6	9	–	–	24	91	116
8. Dominik Starý	G, Benešov	4	5	6	9	8	0	32	79	114
9. Tomáš Dvořák	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	4	4	4	7	0	23	69	105
10. Pavla Trembulaková	ZŠ Sokolská, Třeboň	4	5	6	8	7	2	32	67	101
11. Yan Stepanyshyn	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	4	–	2	9	6	5	26	66	94
12. Veronika Venclová	ZŠ, Nasavrky	4	4	6	9	7	0	30	68	92
13. Jan Trejbal	G Lučka Pika, Plzeň	2	3	4	9	2	–	20	71	91
14. Michal Zobaník	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	4	–	6	5	–	–	15	72	76
15. Kristýna Bilavčíková	G, Židlochovice	1	–	5	–	–	–	6	68	61
16. Krystyna Waniová	ZŠ a MŠ Třinec - Staré Město	4	–	6	4	–	2	16	57	58
17. Borek Požár	G Z. Winttra, Rakovník	4	0	5	9	–	–	18	80	57
18.–19. Jan Prokop	ZŠ Tyršova, Kuřim	2	4	6	–	6	–	18	68	54
18.–19. David Vagner	G, Český Krumlov	–	–	6	6	5	5	22	76	54
20. Pavel Buchlouský	ZŠ Erbenova, Blansko	4	–	3	4	–	2	13	52	53
21. Petr Jakubčík	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	74	52
22. Daniela Hrbáčová	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	60	43
23. Ladislav Nagy	ZŠ a MŠ Brankovice, Tasova, Neso	3	1	2	–	–	0	6	49	42
24.–25. Adam Dejl	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	4	–	–	–	–	–	4	59	39
24.–25. Martin Hejl	1. ZŠ TGM Milevsko	3	5	6	–	–	–	14	89	39
26. Martin Kománek	G, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	52	31
27.–28. Alois Medek	ZŠ a MŠ Čkyně	–	–	–	–	–	–	–	88	30
27.–28. Dušan Morbitzer	G a SOŠZZE Vyškov	–	–	–	–	–	–	–	77	30
29. Mikuláš Plesák	OPEN GATE Říčany	–	–	–	–	–	–	–	88	28
30.–32. Jiří Nábělek	ZŠ a MŠ Chuchelná	–	–	–	–	–	–	–	87	27
30.–32. Martin Repčík	G, Olomouc – Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	59	27

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i>											IV	%	Σ
		1	2	3	4	E	C	41	100	162				
30.–32.	<i>Jonáš Vlasák</i>	G, Benešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	27
33.–36.	<i>Petr Bečvář</i>	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	-	5	6	-	-	-	-	-	-	11	81	25
33.–36.	<i>Lenka Kočárková</i>	G a JŠ, Břeclav	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	25
33.–36.	<i>Vít Kolařík</i>	ZŠ Boženy Němcové, Opava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	25
33.–36.	<i>Marek Kostka</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	81	25
37.	<i>Anna Skalická</i>	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	77	24
38.–39.	<i>Matěj Kafka</i>	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	23
38.–39.	<i>Adam Šišpera</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	-	1	4	5	-	-	-	-	-	10	66	23
40.	<i>Jáchym Baláz</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	22
41.	<i>Jiří Křesák</i>	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	21
42.–43.	<i>Šimon Fouček</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	87	20
42.–43.	<i>Ondřej Konícar</i>	ZŠ Bílovice nad Svitavou	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	20
44.	<i>Mikuláš Mašek</i>	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	61	19
45.–46.	<i>Jiří Holek</i>	ZŠ Letovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	18
45.–46.	<i>Domínik Vrba</i>	G, Lovosice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	58	18
47.–48.	<i>Leoš Sáblik</i>	ZŠ, Rosice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	16
47.–48.	<i>Pavλίna Vodsedálková</i>	G, Semily	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	16
49.	<i>Jitka Rounová</i>	G, Slaný	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	15
50.	<i>Daniěl Pivoňka</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	93	14
51.–53.	<i>Bohumil Hora</i>	Podkrušnohorské G, Most	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	13
51.–53.	<i>Matouš Pikous</i>	Podještědské G, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76	13
51.–53.	<i>Ondřej Šrámek</i>	ZŠ 8. května, Šumperk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	13
54.	<i>Jakub Zemek</i>	G Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	12
55.–57.	<i>Eliška Cejnarová</i>	G a SOŠ, Jaroměř	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	11
55.–57.	<i>Richard Fleischhans</i>	G, Benešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	73	11
55.–57.	<i>Tomáš Hromada</i>	ZŠ V. Vančury, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	11
58.–59.	<i>Jakub Jíra</i>	ZŠ U Pošty, Chrast	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	9
58.–59.	<i>Jan Macháček</i>	G L. Jaroše, Holešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	9

Korespondenční seminář Výfuk

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta


V Holešovičkách 2

18000 Praha 8



www: <http://vyfuk.fykos.cz>

e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.