

## Úloha VI.C ... Po planetách

9 bodů; průměr 7,26; řešilo 39 studentů

1. Planetka je v aféliu od Slunce vzdálená 4,4 AU, v perihéliu 1,6 AU. Vypočítejte oběžnou dobu planetky.
2. Většina telekomunikačních družic obíhá kolem Země po tzv. geostacionární dráze – pozorovateli ze zemského povrchu se zdá, že družice „stojí“ na stejném místě na obloze. Jinými slovy, doba oběhu  $T$  geostacionární družice je stejná, jako perioda rotace Země:  $T = 24$  hod, přičemž dle 3. Keplerova zákona je doba oběhu družice určena její vzdáleností od Země. V jaké výšce nad zemským povrchem musí obíhat družice, aby byla geostacionární?

Pro výpočet oběžné doby planetky využijeme znalost třetího Keplerova zákona a nového vztahu pro výpočet hlavní poloosy: Hlavní poloosa je nejdelší vzdálenost mezi středem elipsy a jejím krajním bodem. Takže sečteme-li vzdálenost v perihéliu a aféliu (tedy nejkratší a nejdelší vzdálenost od ohniska), dostaneme vzdálenost mezi dvěma krajními body. Pokud tuto vzdálenost vydělíme dvěma, dostaneme naši požadovanou hlavní poloosu:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{4,4 \text{ AU} + 1,6 \text{ AU}}{2} = 3 \text{ AU}.$$

Nyní využijeme vztah pro výpočet třetího Keplerova zákona:

$$T_1 = T_2 \sqrt{\frac{a_1^3}{a_2^3}},$$

kde za  $T_2$  a  $a_2$  dosadíme hodnoty pro Zemi:  $T_2 = 1$  rok a  $a_2 = 1$  AU. Dostáváme

$$T_1 = 1 \text{ rok} \sqrt{\frac{(3 \text{ AU})^3}{(1 \text{ AU})^3}} = 5,2 \text{ roku}.$$

Oběžná doba planetky je tedy 5,2 roku.

Druhý příklad je možné počítat dvěma způsoby. Buď přes třetí Keplerův zákon nebo porovnáním tíhové a odstředivé síly. V prvním případě však nemůžeme pro dosazení využít hodnoty pro Zem, protože neporovnáváme dvě tělesa obíhající okolo Slunce. Můžeme však porovnat hodnoty dvou těles obíhajících okolo Země – Měsíc a naši zadanou družici. Z internetu nebo z literatury zjistíme, že oběžná doba Měsíce je  $T_2 = 27,3$  dne a jeho vzdálenost od Země je  $a_2 = 384\,000$  km.

$$a_1 = a_2 \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \sqrt[3]{\frac{(24 \text{ h})^2}{(27,3 \cdot 24 \text{ h})^2}} = 4,24 \cdot 10^4 \text{ km} = 42\,400 \text{ km}.$$

Nyní jsme vypočítali vzdálenost družice od středu Země, nikoliv od jejího povrchu. Odečteme proto poloměr Země:

$$h = a_1 - R_Z = 42\,400 \text{ km} - 6\,380 \text{ km} = 36\,020 \text{ km}.$$

Družice bude obíhat ve vzdálenosti 36 020 km od povrchu Země.

V druhém případě zjistíme výšku družice  $H$  porovnáním odstředivé síly, která táhne těleso pryč od Země, a gravitační síly, která naopak přitahuje těleso o hmotnosti  $m$  k Zemi.

$$\frac{mv^2}{R_Z + H} = G \frac{M_Z m}{(R_Z + H)^2}.$$

Rychlost vyjádříme ze vztahu pro oběžnou dobu družice. Víme, že za jednu periodu (den) družice uletí konstantní rychlostí  $v$  vzdálenost rovnající se obvodu kružnice s poloměrem  $R_Z + H$

$$v = \frac{2\pi(R_Z + H)}{T}.$$

Nyní dosadíme do původní rovnosti gravitační a odstředivé síly a vyjádříme hledanou výšku  $H$  družice nad Zemí.

$$m \frac{[2\pi(R_Z + H)]^2}{R_Z + H T^2} = G \frac{M_Z m}{(R_Z + H)^2},$$

$$\frac{4\pi^2(R_Z + H)}{T^2} = G \frac{M_Z}{(R_Z + H)^2}.$$

Úpravou dostaneme

$$(R_Z + H)^3 = \frac{GM_Z T^2}{4\pi^2},$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{GM_Z T^2}{4\pi^2}} - R_Z.$$

Za hmotnost  $M_Z$  dosadíme hmotnost Země, čas oběhu  $T$  je 24 hodin a  $R_Z$  je poloměr Země.

$$H = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (24 \cdot 3600 \text{ s})^2}{4\pi^2}} - 6380 \text{ km} = 35900 \text{ km}.$$

Geostacionární družice bude obíhat kolem Země ve vzdálenosti 35 900 km.

Jak můžeme vidět, oba výsledky se liší pouze o 120 km, což je skvělý výsledek. Pro porovnání – geostacionární dráha družic nad Zemí se nachází ve výšce asi 35 800 km. Naše výsledky tedy nejsou daleko od skutečnosti.

**Kateřina Stodolová**  
kata@vyfuk.mff.cuni.cz

**Tomáš Kremel**  
tomask@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.