Úloha VI.4 . . . Nafouknutá planeta

9 bodů; průměr 6,41; řešilo 46 studentů

Již na začátku 18. století objevil Isaac Newton slavný gravitační zákon popisující gravitační sílu mezi dvěma tělesy

$$F_g = G\frac{mM}{r^2}\,. \tag{1}$$

V této rovnici m a M vyjádřují hmotnosti dvou těles a r vzdálenost jejich těžišť. G je gravitační konstanta,[1] *která má v soustavě SI velikost*

$$\{G\} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,.$$

1. *Z rovnice* (1) *určete jednotku gravitační konstanty v soustavě SI.*
2. *Je-li poloměr Země $r = 6\,378\,\mathrm{km}$ a její hmotnost $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, vypočítejte tíhové zrychlení g na povrchu Země.*
   Pomůcka: Porovnejte rovnici (1) *se vzorečkem pro tíhovou sílu, který znáte z hodin fyziky.*
3. *Představme si, že by se poloměr Země zdvojnásobil, ovšem její hmotnost by se nezměnila. Jaké by bylo gravitační zrychlení g' na takovéto Zemi?*
4. *Víme, že Měsíc obíhá kolem Země přibližně po kruhové dráze s poloměrem R, protože gravitační síla Země se v této vzdálenosti vyrovnává s odstředivou silou o velikosti*

   $$F_o = \frac{M_m v^2}{R}\,,$$

   kde v je rychlost pohybu Měsíce kolem Země a M_m hmotnost Měsíce. O kolik by se změnila vzdálenost R, pokud se Země zvětší stejně jako v předešlém bodě?

1. Našou úlohou je nájsť pre gravitačnú konštantu G také jednotky v SI, ktoré keď dosadíme do Newtonovej gravitačnej rovnice, tak dostaneme jednotky sily. Pripomeňme si ešte raz tvar rovnice:

   $$F_g = G\frac{mM}{r^2}\,.$$

   Aby sme jednotky konštanty G nemuseli tipovať, tak bude jednoduchšie, keď si z uvedenej rovnice samotnú konštantu vyjadríme a jej jednotky dopočítame[2]

   $$[G] = \frac{[F_g]\left[r^2\right]}{[m]\,[M]} = \frac{\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}^2}\cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\cdot s^2}}\,.$$

   Rozmer (jednotka) gravitačnej konštanty je teda $[G] = \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$.
2. Sila, akou sa priťahuje zemeguľa a nejaký predmet s hmotnosťou m, má rovnakú veľkosť, ako pôsobiaca tiažová sila, ktorú už dôverne poznáme. Preto môžeme napísať

   $$G\frac{mM}{r^2} = mg\,.$$

   Z tejto rovnice už vieme hodnotu gravitačného zrýchlenia g ľahko vypočítať

   $$g = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}\,\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6\,378\,000\,\mathrm{m})^2} \doteq 9{,}79\,\mathrm{m{\cdot}s^2}\,.$$

[1] Někdy se tato konstanta značí i řeckým písmenem $\varkappa$.

[2] Jednotky sily ľahko zistíme napríklad z druhej Newtonovej rovnice $F = ma$. Dosadiť jednotky hmotnosti a zrýchlenia je už triviálne.

Vidíme, že vypočítaná hodnota sa podobá tej skutočnej ($9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), s ktorou bežne počítame. Rovnaké nie sú preto, lebo Zem v skutočnosti nie je dokonalá guľa a tým pádom nemôže byť všade na Zemi rovnaké tiažové zrýchlenie.[3] Polomer $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ od jadra je správny iba v oblasti rovníka. Na póloch je zhruba o $22\,\mathrm{km}$ menší. Gravitačné zrýchlenie $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je teda iba akási priemerná hodnota, ktorá je v dostatočnej miere presná napríklad pre oblasť strednej Európy.

3. Uvažujme, že Zem zdvojnásobila svoj polomer (ale hmotnosť ostáva zachovaná). Hodnotu gravitačného zrýchlenia g' na takejto „novej Zemi“ vypočítame presne rovnakým spôsobom, ako v predošlom prípade. Jediný parameter, ktorý sa zmení, je polomer Zeme. Veľkosť g' vieme zistiť aj bez priameho výpočtu zo vzorca. Všimnime si vo vzťahu pre gravitačné zrýchlenie, že je úmerný $1/r^2$, čo sa značí aj ako $g \sim 1/r^2$. To znamená, že ak by sme namiesto polomeru r dosadili hodnotu $2r$, tak sa výsledok zmenší 4-krát oproti predošlému.[4]
   Nové gravitačné zrýchlenie bude mať teda veľkosť
$$g' = \frac{1}{4} g \doteq 2{,}45\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$
4. Mesiac obiehajúci okolo Zeme sa nepribližuje ani nevzďaľuje, pretože gravitačná sila F_g, ktorou pôsobí Zem na Mesiac, je kompenzovaná odstredivou silou F_o, ktorá existuje vďaka kruhovému pohybu. Túto rovnosť vieme zapísať aj ako
$$G\frac{M_\mathrm{m} M}{R^2} = \frac{M_\mathrm{m} v^2}{R}\,.$$
   Z tejto rovnosti vidíme, že pohyb Mesiaca absolútne nezávisí od polomeru Zeme r. Nech by mala Zem akýkoľvek polomer (napríklad aj dvojnásobný oproti skutočnému), tak by na Mesiac pôsobila stále rovnakou silou, pretože tá závisí od hmotností telies a vzdialenosti ich ťažísk.
   Teda vzdialenosť stredu Zeme od stredu Mesiaca sa nezmení.

Poznámky k došlým riešeniam

Asi najčastejšou chybou, ktorú ste robili bolo, že keď ste v prvej časti úlohy odvádzali jednotky gravitačnej konštanty G, tak sa vám vo výsledku vyskytla okrem iných aj jednotka newton. Treba si však uvedomiť, že jednotka sily nepatrí medzi základné jednotky SI, akými sú napríklad meter, sekunda, kilogram... Dá sa pomerne jednoducho vyjadriť cez druhý Newtonov zákon ako
$$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$
Druhou častou chybou bolo to, že ste niektorí po zdvojnásobení veľkosti Zeme predpokladali 4-krát menšiu gravitačnú silu pôsobiacu na Mesiac, pretože sa 4-krát zmenšila tiažová sila na povrchu novej Zeme. Tieto dve veci ale spolu nesúvisia, pretože **tiažová sila** nie je to isté ako **gravitačná sila**! Tiažová sila na povrchu novej Zeme sa skutočne zmenšila, pretože sa zvýšila

[3] Zamyslite sa, prečo podávajú športovci rozdielne výkony na olympiáde v Brazílii a na olympiáde v Juhoafrickej republike.

[4] Pretože $\dfrac{1}{(2r)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{r^2}$.

vzdialenosť povrchu od stredu Zeme. Avšak gravitačná sila medzi Zemou a Mesiacom nemá dôvod sa meniť, pretože ťažiská planét ostávajú na svojich pôvodných miestach.

Jakub Bahyl
`kubo@vyfuk.mff.cuni.cz`