Úloha IV.C ... Zákon zachování zimy

9 bodů; průměr 2,95; řešilo 39 studentů

1. *Jednoho chladného pondělí sněžilo natolik, že to Tomovi zasypalo dům. Vytáhl tedy ze sklepa lopatu na sníh a pustil se do práce. Odhazování sněhu vykonával tak, že sníh podebral lopatou, zvedl ho do nezanedbatelné výšky a rovnoměrnou rychlostí ho přenesl k hluboké jámě, kde ho vysypal. Jak se při takovém procesu mění kinetická, potenciální a mechanická energie nabraného sněhu? Zkuste to co nejpřesněji zakreslit do grafů závislých na čase. Všechny potřebné hodnoty přibližně odhadněte.*
2. *Paťo rád sáňkuje. Tentokrát ale svou jízdu neubrzdil a zastavil až ve středu zamrzlého jezera. Led byl velmi kluzký a rozhýbat se na něm by bylo opravdu náročné. Naštěstí má Paťo s sebou dělo na sněhové koule. Kromě samotného děla má k dispozici dvě koule o hmotnostech $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$. Jeho dilema nyní spočívá v tom, že se nedokáže rozhodnout, jakým způsobem vystřelení koulí za sebe získá nejvyšší rychlost. Dělo dokáže střílet maximální rychlostí $v = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a hmotnost Paťa, děla a saní je dohromady $M = 80\,\mathrm{kg}$.*
   a) *Který způsob je nejúčinnější, když dělo vystřelí obě koule naráz, nebo když vystřelí nejdříve těžší a poté lehčí, anebo naopak? Jaké nejvyšší rychlosti bude poté Paťo schopen dosáhnout?*
   b) *Ani tak kluzký led není dokonale hladký, a tak se Paťo časem na jezeře vlivem tření znovu zastaví. Kolik tepla led přijme po dobu Paťova pohybu mezi prvním a druhým zastavením?*
3. *Krasobruslař Petr si všiml, že když se snaží dělat piruetu s rozpaženýma rukama, tak je schopný udělat přibližně 14 otáček za 6 sekund. Jeho moment setrvačnosti je v té chvíli $J = 0{,}9\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Když však připaží ruky k tělu, svůj moment setrvačnosti zmenší o $\Delta J = 0{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Kolik otáček udělá Petr s připaženýma rukama za 10 sekund?*

1. Odklízení sněhu

Stanovme nejdříve dvě potřebné veličiny. Hmotnost sněhu, který zvedá Tom, nechť je $m = 10\,\mathrm{kg}$. Za hodnotu tíhového zrychlení berme $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Tom při odhazování nejdříve podebere sníh lopatou, vyzvedne ho do nějaké výšky, přenese k jámě a tam ho vysype. Tento pohyb má tedy 3 logické části. Je důležité zmínit, že na začátku, na konci a mezi těmito částmi je rychlost a kinetická energie sněhu vždy na velmi krátkou dobu nulová. V první a druhé části koná sníh rovnoměrný přímočarý pohyb, ve třetí pak rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g.

Během zvedání do výšky, řekněme $h_1 = 1\,\mathrm{m}$, tento sníh nabývá kinetickou energii E_{k1}, protože se pohybuje rychlostí, $v_1 = 0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Její velikost je

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\,\mathrm{kg}\cdot\left(0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 = 1{,}25\,\mathrm{J}\,.$$

Předpokládáme-li, že rychlost zvedání se nemění, tato energie je po čas této fáze konstantní.

Naopak potenciální energie se postupně mění z nulové hodnoty[1] na hodnotu

$$E_{p1} = mgh_1 = 10\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot 1\,\mathrm{m} = 98{,}1\,\mathrm{J}\,.$$

[1] Nulovou hladinu potenciální energie lze volit úplně libovolně. My jsme si ji zvolili v nulové výšce, tj. na zemi, neboť s touto přirozenou volbou se dobře počítá. Například v atomové fyzice je zase výhodné zvolit nulovou hladinu potenciální energie v nekonečné vzdálenosti od atomového jádra.

Všimněme si, že potenciální energie je několikrát větší než kinetická.

Mechanická energie E se vždy rovná součtu kinetické a potenciální energie. V tomto případě tedy bude růst z hodnoty E_{k1} do hodnoty $E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} = 99{,}35\,\mathrm{J}$.

Nakonec si spočtěme ještě čas t_1 tohoto děje

$$t_1 = \frac{h_1}{v_1} = \frac{1\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 2\,\mathrm{s}\,.$$

Po vyzvednutí Tom nese sníh k jámě rychlostí $v_2 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Toto přenášení ať trvá čas $t_2 = 4\,\mathrm{s}$. Potenciální energie sněhu se prakticky nemění[2] a je po tento čas rovna E_{p1}.

Kinetická energie bude stejně jako minule

$$E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot \left(1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 = 5\,\mathrm{J}\,.$$

Mechanická energie bude rovněž konstantní a rovna $E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p1}} = 103{,}1\,\mathrm{J}$.

Nakonec se Tom velmi krátce zastavil u hluboké jámy (kinetická energie nulová) o hloubce $h_3 = -2\,\mathrm{m}$ a vysypal do ní sníh. Ten začal padat volným pádem do jámy. Musel padat po dobu $t_3 = 0{,}8\,\mathrm{s}$. Při tomto ději se rovnoměrně zvyšuje rychlost sněhu,[3] tj. kinetická energie stoupá z nuly jako funkce $y(x) = x^2$, to proto, že kinetická energie je závislá rovněž na druhé mocnině rychlosti.

Nyní se zamysleme nad potenciální energií. Při volném pádu působí na sníh pouze tíhová síla, tedy síla, která je zodpovědná za samotnou existenci potenciální energie. Jak již jistě tušíte, znamená to, že soustava sníh – Země je *izolovaný systém* a platí v něm, že mechanická energie se nemění.

Potenciální energie bude tedy doplněk kinetické energie do hodnoty, která byla na začátku tohoto děje, tj. E_{p1}. Parabolicky „obráceně“ bude klesat z této hodnoty na hodnotu na dně jámy

$$E_{\mathrm{p3}} = mgh_3 = 10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot (-2\,\mathrm{m}) = -196{,}2\,\mathrm{J}\,.$$

Jak vidíme, na dně jámy je potenciální energie dokonce záporná. Úplně na konec poznamenejme, že sníh bude mít těsně před dopadem největší kinetickou energii, kterou v momentě dopadu ztratí (sníh se po dopadu do jámy nepohybuje). Tato energie se ztratí třením, deformací kupy sněhu a podobně.

Nyní zakresleme všechny průběhy do grafu.

Na plný počet bodů nebylo potřeba odhadovat a počítat konkrétní hodnoty. Ty jsou tady zejména pro zdůraznění rozdílu mezi velikostmi kinetické a potenciální energie. Důležité ale je, aby byly průběhy všech energií realistické, tj. (ne)rovnoměrné stoupání, klesání apod.

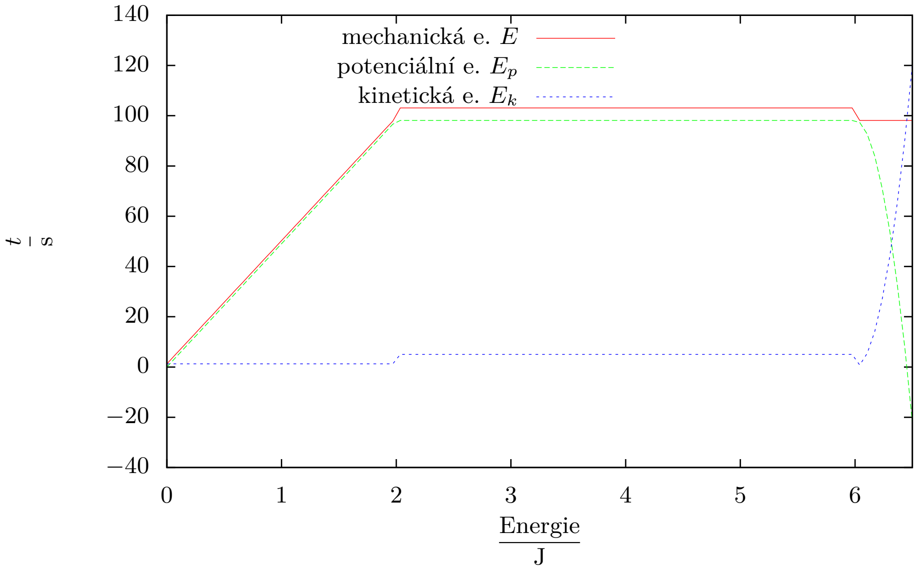
2. Paťo a sáňky

Při této úloze využijeme zákona zachování hybnosti, o kterém jsme pojednávali ve druhé kapitole Výfučtení.

a) Uvažme, že Paťo hází koule ve vodorovném směru. Poněvadž v tomto směru na Paťa s koulemi a saněmi nepůsobí žádná síla, platí zákon zachování hybnosti. Ten říká, že velikost hybnosti odhozených koulí se musí rovnat velikosti hybnosti Paťa, který se bude pohybovat

[2] Zanedbáme-li malé změny výšky při kráčení.

[3] Zrychlení (i tíhové) určuje, o kolik $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ se změní rychlost za sekundu. Poněvadž je ale g konstantní, rovnoměrný musí být i nárůst rychlosti.



opačným směrem. Sice to není na první pohled zřejmé, ale záleží i na pořadí vystřelení koulí. Proberme si tedy postupně všechny tři možnosti.

Vystřelí-li obě koule současně, budou se vzhledem k zemi pohybovat rychlostí v. Velikost hybnosti koulí $p = (m_1 + m_2)\,v$ se pak musí rovnat velikosti hybnosti Paťa a saní. Tedy

$$Mv_1 = (m_1 + m_2)\,v\,,$$
$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{M} v = \frac{1\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}}{80\,\mathrm{kg}} 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 0{,}75\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Teď uvažujme, že Paťo nejdřív vystřelí jenom jednu z koulí, je jedno kterou. Vyberme si tedy kouli o hmotnosti m_1. Hybnost jediné koule $m_1 v$ bude určitě menší než p a tedy i rychlost Paťa bude menší než v_1. Tuto rychlost si označme v_2. Paťo při této rychlosti vystřelí i druhou, zbylou kouli. Její rychlost vůči zemi ale už nebude v, nýbrž $v - v_2$. Tím pádem bude i její hybnost jen $m_2\,(v - v_2)$. Celkový „zpětný ráz“ koulí bude

$$m_1 v + m_2\,(v - v_2) < (m_1 + m_2)\,v\,.$$

Jelikož vytvořená hybnost by byla menší, než by tomu bylo při současném vystřelení obou koulí, Paťo by získal menší rychlost. Paťo má tedy vystřelit obě koule současně.

b) Nyní se Paťo pohybuje rychlostí v_1, tedy jeho kinetická energie je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} M v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 80\,\mathrm{kg} \cdot \left(0{,}75\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2 = 22{,}5\,\mathrm{J}\,.$$

Jelikož se Paťo zastaví (jeho kinetická energie bude nulová), musí nutně docházet ke ztrátám této energie, resp. její nežádoucí přeměně. Energie se bude třením měnit na teplo a zahřívat

led a dolní část Paťových saní. Tepelnou výměnou si ale led „vezme" i (téměř všechno) teplo ze saní. Do momentu zastavení tedy přijme veškerou kinetickou energii, tj. $Q = E_\mathrm{k}$.
Ještě bychom mohli namítat, že nějaké ztráty způsobí i např. odpor vzduchu. Jeho vliv je ale při rychlosti v_1 zanedbatelný.

Krasobruslař

Zde využijeme znalosti zákona zachování momentu setrvačnosti. Ze známých hodnot můžeme vypočítat Petrův moment setrvačnosti poté, co připaží ruce k tělu.

$$J_1 = J - \Delta J = 0{,}9\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} - 0{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^2} = 0{,}7\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Dále využijeme zmiňovaného zákona zachování: na Petra působí jenom tíhová síla, tření bruslí o led zanedbejme.[4] Tíhová síla ale působí přímo v ose otáčení, tedy její moment bude

$$M = F_g \cdot 0\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{N{\cdot}m}\,.$$

Na Petra tedy nepůsobí žádný vnější moment síly, proto můžeme psát

$$L = L_1\,,$$
$$J\omega = J_1\omega_1\,.$$

Za úhlové rychlosti si dosaďme výraz $2\pi f$, což je pouze jiný zápis pro ω

$$J \cdot 2\pi f = J_1 \cdot 2\pi f_1\,,$$
$$f_1 = \frac{J}{J_1} f = \frac{0{,}9\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}}{0,7\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}} \cdot \frac{14\,\mathrm{ot}}{6\,\mathrm{s}} = 3\,\mathrm{ot{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Za 10 sekund Petr udělá logicky i 10-krát více otáček: Petr s připaženýma rukama udělá za 10 sekund 30 otáček.

Poznámky k došlým řešením

V prvej časti príkladu ste poväčšinou dobre zvládli kreslenie grafov po moment, kedy Tom začína púšťať sneh do diery. Neuvedomili ste si totiž, že akonáhle sneh padá voľným pádom do diery, tak potenciálna energia neklesá lineárne, ale kvadraticky od času (čiže namiesto rovnej čiary v grafe, to bude čiara krivšia). Tento fakt sa dá spozorovať napríklad z toho, že aktuálnu výšku snehu od času by sme počítali ako $h(t) = H - gt^2/2$. Keďže mechanická energia sa musí zachovávať, tak kinetická energia začne od momentu pádu snehu kvadraticky rásť v závislosti od času

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2\,.$$

V druhej časti som sa pri opravovaní najviac stretol s tým, že ste to celé počítali cez energie. Vypočítali ste energiu letiacich gúľ a jednoducho prehlásili, že takú istú energiu bude mať aj Paťo. Toto tvrdenie ale predsa z ničho nevyplýva. Zákon zachovania energie hovorí predsa iba to, že hodnota celkovej energie je stále rovnaká. Čiže neplatí nič ako „rovnosť energií v opačných

[4] Ve skutečnosti je tření pro krasobruslaře velmi důležité, třením např. brzdí. Při uvažovaném otáčení bude ale moment třecích sil zanedbatelný, protože třecí síly budou působit blízko osy otáčení.

smeroch". Ďalej som body strhával ešte za to, keď nebola dostatočná argumentácia k tvrdeniu, že po hodení oboch gúľ pôjde Pačo najrýchlejšie.

No a v tretej časti obrovská väčšina rišiteľov predpokladala, že sa zachováva energia a tým pádom Petr urobí o niečo viac otáčok. To však nie je pravda. Petr predsa počas pripažovania rúk koná prácu proti odstredivej sile. Touto prácou zvyšuje svoju rotačnú energiu. To znamená, že veličina, ktorá sa reálne zachováva je práve *moment hybnosti*. V konečnom dôsledku Petr urobí (vďaka vzniknutej energii) ešte o niečo viacej otáčok, než ste vy vypočítali.

Mojou radou do budúcnosti bude to, aby ste pri používaní zákona zachovania energie pozorne sledovali, či sa náhodou energia nestráca, alebo či nejako nepribúda.

Jakub Bahyl
kubo@vyfuk.mff.cuni.cz

Marek Otýpka
marek@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.