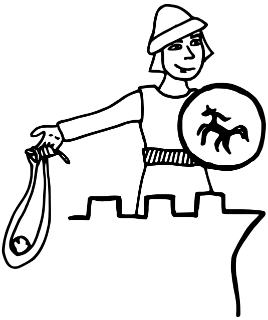
Úloha IV.4 ... Problémy práčete

9 bodů; průměr 6,45; řešilo 47 studentů



Lukáš má rád středověk. Kdyby žil ve 13. století, určitě by se stal práčetem, středověkým bojovníkem s prakem. A jak se s takovým prakem ve středověku zacházelo? Na konec praku s délkou ramene $r = 80\,\mathrm{cm}$ se umístil kámen s hmotností $m = 600\,\mathrm{g}$ a práče ho nad hlavou roztočilo na frekvenci $f = 200\,\mathrm{ot{\cdot}min^{-1}}$ (otáček za minutu). Nakonec se škubnutím kámen z praku uvolnil a práče mohlo sledovat, zda-li zasáhne cíl.

1. *Jaká je úhlová rychlost ω praku? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.*
2. *Jakou rychlostí v_0 se pohybuje kámen těsně po „výstřelu“ z praku?*
3. *Šikovné práče vystřelilo kámen ve vodorovném směru rychlostí v_0. Do jaké vzdálenosti x kámen doletí, pokud se v momentě výstřelu kámen nacházel ve výšce $h = 2\,\mathrm{m}$?*
4. *Rameno, ze kterého je prak vyroben, lze napínat maximální silou $F_\mathrm{m} = 700\,\mathrm{N}$. Práče se leklo, zda-li odstředivá síla kamene při střílení není příliš velká. Pomozte mu a vypočítejte, na jakou úhlovou rychlost ω_m lze kámen roztočit, aby to prak ještě vydržel. Poté vypočítejte maximální vzdálenost x_m, do které je prak schopen dostřelit za podmínek jako v předešlém úkolu.*

Nejprve si sepíšeme vše, co známe, a převedeme na základní jednotky (přičemž otáčky za minutu převedeme na otáčky za sekundu, neboli Hz)

$$
\begin{aligned}
r &= 80\,\mathrm{cm} = 0{,}8\,\mathrm{m}\,,\\
m &= 600\,\mathrm{g} = 0{,}6\,\mathrm{kg}\,,\\
f &= 200\,\mathrm{ot{\cdot}min^{-1}} = \frac{200\,\mathrm{ot}}{60\,\mathrm{s}} = \frac{10}{3}\,\mathrm{Hz}\,,\\
F_\mathrm{m} &= 700\,\mathrm{N}\,,\\
h &= 2\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}
$$

1. *Frekvence f* je fyzikální veličina, která sama o sobě vyjadřuje, kolikrát se daný děj zopakuje za jednotku času. Podle definice platí

$$f = \frac{1}{T}\,,$$

kde perioda T je doba trvání daného děje. Na druhou stranu *úhlová rychlost ω* vyjadřuje, jak rychle se mění úhel s časem u pohybu po kružnici. Můžeme ji chápat jako ekvivalent rychlosti u přímočarého pohybu, která vyjadřuje, jak rychle se mění uražená dráha s časem. Uvažujeme-li takto, není problém si odvodit, že jednotka úhlové rychlosti je jednotka úhlu za sekundu. Protože pracujeme s radiány, uvažujeme jednotku úhlové rychlosti jako $[\omega] = \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.
Nyní se zamysleme. Jedna otáčka, neboli plný úhel (tedy úhel $2\pi rad$), trvá čas T. Rychlost, s jakou se provede plná otáčka, bude poté v analogii s již zmiňovanou (a vám doufejme dobře známou) rychlostí přímočarého pohybu

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Máme téměř hotovo, ale proč jsme vlastně na začátku zmiňovali frekvenci? Protože s úhlovou rychlostí úzce souvisí. Jsme totiž schopni najít vztah dávající do souvislosti frekvenci děje s jeho úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi f\,.$$

Dosazením dostáváme

$$\omega = 2\pi f = \left(2\,\pi\,\mathrm{rad}\cdot\frac{10}{3}\,\mathrm{s}^{-1}\right) = 20{,}94\,\mathrm{rad{\cdot}s}^{-1}\,.$$

Hledaná úhlová rychlost praku je $20{,}94\,\mathrm{rad{\cdot}s}^{-1}$.

2. Představme si, jak se lano praku postupně otáčí kolem ruky práčete. Všechny body lana se pak pohybují *stejnou úhlovou rychlostí*. Ovšem jistě z vlastní zkušenosti víte, že kdyby vás práče kamenem na konci lana praštilo, tak při kratším lanu by rána bolela méně než při delším. To je způsobeno *rozdílnou obvodovou rychlostí* bodů lana. Tento rozpor vzniká z toho, že vzdálenější body se pohybují po kružnicích o větším poloměru a na rozdíl od bližších bodů musejí za stejný časový interval urazit delší dráhu. Intuitivně tak odvodíme, že taková obvodová rychlost bude záviset přímo úměrně na úhlové rychlosti pohybu soustavy a také na vzdálenosti od osy otáčení (jinak si můžete rozmyslet řádný důkaz třeba přes zmíněné délky oblouků). Symbolicky tento vztah můžeme zapsat jako

$$v = \omega r\,.$$

Nyní, jestliže se zajímáme o rychlost kamene těsně po výstřelu z praku, budeme počítat právě onu obvodovou rychlost kamene, neboť předpokládáme, že se v tak krátkém okamžiku po vypuštění jeho rychlost nesníží.

$$v_0 = \omega r = 2\pi f r = \left(2\,\pi\,\mathrm{rad}\cdot\frac{10}{3}\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 0{,}8\,\mathrm{m}\right) = 16{,}76\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}\,.$$

Všimněme si, že zde se radiány jaksi „ztrácejí“. Je to díky definici radiánu, která zaručuje, že figurují jako konstanta, tzn. úhel v radiánech násobený délkou je ve výsledku opět délka. Odpověď na otázku rychlosti kamene těsně po výstřelu z praku je tedy $16{,}76\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$.

3. V této části budeme zanedbávat odpor vzduchu. Za této podmínky se podle principu tzv. *superpozice*[1] horizontální složka okamžité rychlosti v_0 (složka vodorovná se zemí) se nebude měnit po celou dobu letu. Ve vodorovném směru na kámen nepůsobí žádné síly, tzn. podle prvního Newtonova zákona zde není nic, co by tuto složku rychlosti měnilo. Vzdálenost, do níž kámen doletí, bude poté jednoduše $x = v_0 t_\mathrm{v}$, kde t_v je doba vrhu. Rychlost v_0 známe, pro určení doby letu využijeme opět principu superpozice. Doba letu kamene bude to samé, jako doba volného pádu z dané výšky dvou metrů (zde působí síla gravitační). Pro volný pád z nulové vertikální složky rychlosti platí vztah pro pohyb rovnoměrně zrychlený tíhovým zrychlením.

$$h = \frac{1}{2}g t_\mathrm{v}^2 \quad \Rightarrow \quad t_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

[1] Princip, který v této situaci říká, že padání kamene si můžeme rozložit (a taky rozložíme) na dva pohyby – jeden přímočarý ve směru vystřelení a druhý bude volný pád. Když tyto pohyby složíme, dostaneme reálnou trajektorii padajícího kamene, což je v prostředí bez odporu část paraboly, zatímco v atmosféře křivka, která se nazývá balistická.

Za t_v si dosadíme do vztahu pro vzdálenost

$$x = v_0 t_\mathrm{v} = \left(2\pi f r \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 16{,}76\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot 2\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}} = 10{,}70\,\mathrm{m}\,.$$

Vystřelí-li práče kámen vodorovně se zemí ve výšce 2 m, doletí do vzdálenosti 10,70 m.

4. Síla, která působí na těleso pohybující se po kružnici, je závislá na tom, jak rychle se těleso otáčí. O tom se můžeme přesvědčit například cvičební pomůckou Power® Ball, která je na tomto principu založena (dalším ukázkovým příkladem je právě závaží na provázku, třeba prak). Čím rychleji točíme, tím náročnější je udržet Power® Ball v ruce. Na kámen ve vztažné soustavě s ním spojené působí odstředivá síla, která je kompenzována reakcí provázku. Máme zadáno, že maximální velikost této reakce, kterou je schopno rameno praku „přežít“ je $F_\mathrm{m} = 700\,\mathrm{N}$. Stav, který nás zajímá, je chvíle, kdy mají odstředivá síla s reakcí stejnou velikost, tzn. $F_\mathrm{m} = F_\mathrm{o}$. Pro odstředivou sílu platí vztah

$$F_\mathrm{o} = m\frac{v^2}{r}\,,$$

kde v je tečná rychlost kamene a r je délka ramene, na němž kámen rotuje. Máme-li však dle zadání pracovat s maximální možnou úhlovou rychlostí ω_m, musíme vztah pro odstředivou sílu přepsat pomocí již zmíněného vztahu $v = \omega r$ na tvar

$$F_\mathrm{m} = m\omega_\mathrm{m}^2 r\,.$$

Nyní již můžeme jednoduše vyjádřit ω_m

$$\omega_\mathrm{m}^2 = \sqrt{\frac{F_\mathrm{m}}{mr}} = \sqrt{\frac{700\,\mathrm{N}}{0{,}6\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}8\,\mathrm{m}}} = 38{,}19\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Poslední otázka se týká toho, jak se tato úhlová rychlost projeví na doletu kamene po výstřelu z praku. Pro vzdálenost x_m si „půjčíme“ již odvozený vztah z druhé části.

$$x_\mathrm{m} = \omega_\mathrm{m} r\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{F_\mathrm{m}}{mr}}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2F_\mathrm{m}h}{mrg}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2\cdot 700\,\mathrm{N}\cdot 2\,\mathrm{m}}{0{,}6\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}8\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}} = 19{,}51\,\mathrm{m}\,.$$

Odpovědi v poslední části jsou tedy následující. Maximální přípustná úhlová rychlost praku je $\omega_\mathrm{m} = 38{,}19\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$, přičemž při této úhlové rychlosti kámen doletí do vzdálenosti $x_\mathrm{m} = 19{,}51\,\mathrm{m}$.

Tomáš Kremel
tomask@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.