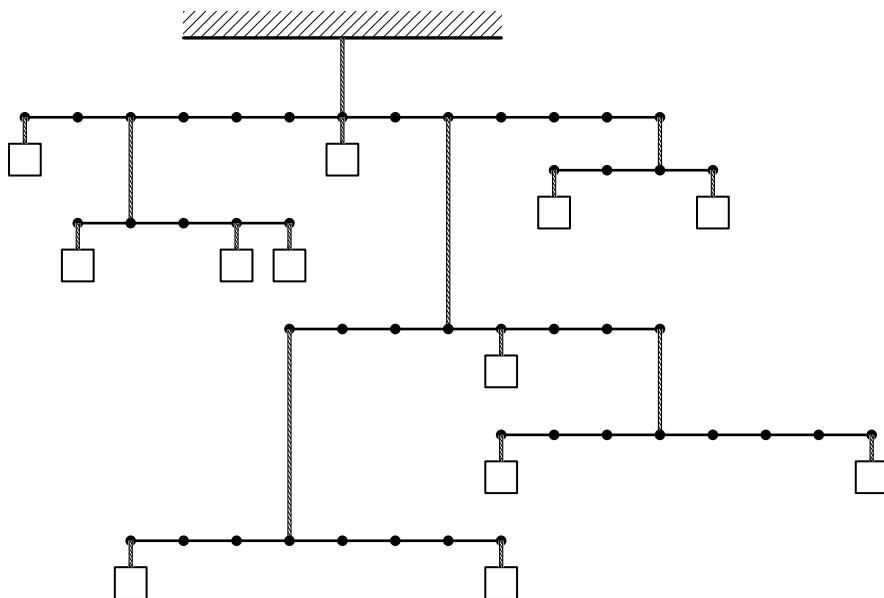


Úloha IV.2 ... Rovnováha

5 bodů; průměr 3,61; řešilo 54 studentů

Do schématu na obrázku 3 doplňte po jednom závaží od 1 kg do 12 kg tak, aby byla soustava pák vyvážená. Hmotnost tyček a provázků zanedbejte.



Obr. 1: Schéma pák

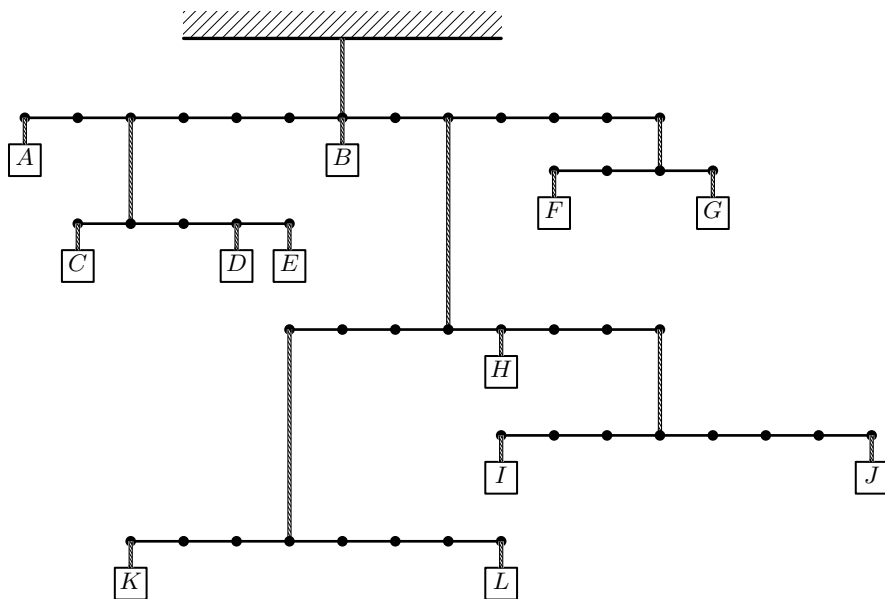
Při řešení této úlohy budeme vycházet ze znalosti, že páka se nachází v rovnováze, je-li výsledný moment síly vůči ose procházející bodem závěsu nulový. To znamená, že celkový moment na levé straně páky musí být stejný jako výsledný moment na pravé straně. Moment síly M přitom spočítáme jako součin působící síly F ve vzdálenosti d od osy otáčení

$$M = Fd.$$

Pro zjednodušení výpočtů budeme do všech rovnic místo síly dosazovat hmotnost závaží v kilogramech (všechny rovnice podělíme gravitačním zrychlením g). Abychom se lépe orientovali mezi jednotlivými závažími, označíme si je zleva doprava a shora dolů postupně písmeny A až L jako na obrázku 3.

Začneme dvěma rovnováhami na pákách úplně dole (závaží $K - L$ a $I - J$). V obou případech působí na pravé straně závaží ve vzdálenosti 4 jednotky a na levé straně ve vzdálenosti 3 jednotky od místa závěsu. Z výše zmíněného vztahu

$$\begin{aligned} 3m_1 &= 4m_2 \\ \frac{m_1}{m_2} &= \frac{4}{3}, \end{aligned}$$



Obr. 2: Označení pák

tedy vychází poměr hmotností použitých závaží 4 : 3, možné jsou tedy kombinace 4 kg a 3 kg, 8 kg a 6 kg, 12 kg a 9 kg. Zároveň musí nastat rovnováha i na páce o jedno patro výše (páka $(K + L) - (H + I + J)$), což po dosazení do rovnosti momentů lze zapsat jako

$$(K + L) = 4(I + J) + H.$$

Nalevo můžeme ze zbylých závaží získat hodnoty 21 kg, 42 kg nebo 63 kg, napravo 28 kg + H , 56 kg + H nebo 84 kg + H . Jelikož nejtěžší možné závaží má hmotnost 12 kg, je evidentní, že rovnici lze doplnit pouze kombinací

$$3(12 + 9) = 4(8 + 6) + 7.$$

Tímto jsme určili hmotnost pěti z dvanácti závaží: $K = 12$ kg, $L = 9$ kg, $I = 8$ kg, $J = 6$ kg, $H = 7$ kg. Stále tedy máme k dispozici závaží o hmotnostech 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 10 kg a 11 kg.

Nyní se podíváme na páku $C - (D + E)$. Podmínku rovnováhy si opět můžeme vyjádřit rovnicí

$$C = 2D + 3E.$$

Zbylá závaží lze vybrat pouze dvěma způsoby, aby rovnost platila

$$\begin{array}{lll} C = 11 \text{ kg}, & D = 1 \text{ kg}, & E = 3 \text{ kg}, \\ C = 11 \text{ kg}, & D = 4 \text{ kg}, & E = 1 \text{ kg}. \end{array}$$

V obou případech musí být $C = 11$ kg a použijeme závaží o hmotnosti 1 kg.

Na páce $F - G$ rovnováhu zapíšeme

$$2F = G.$$

Ze zbylých závaží lze utvořit jen dvě přípustné kombinace 2 kg a 4 kg nebo 5 kg a 10 kg.

Podmínku rovnováhy na celé páce vystihneme rovnicí

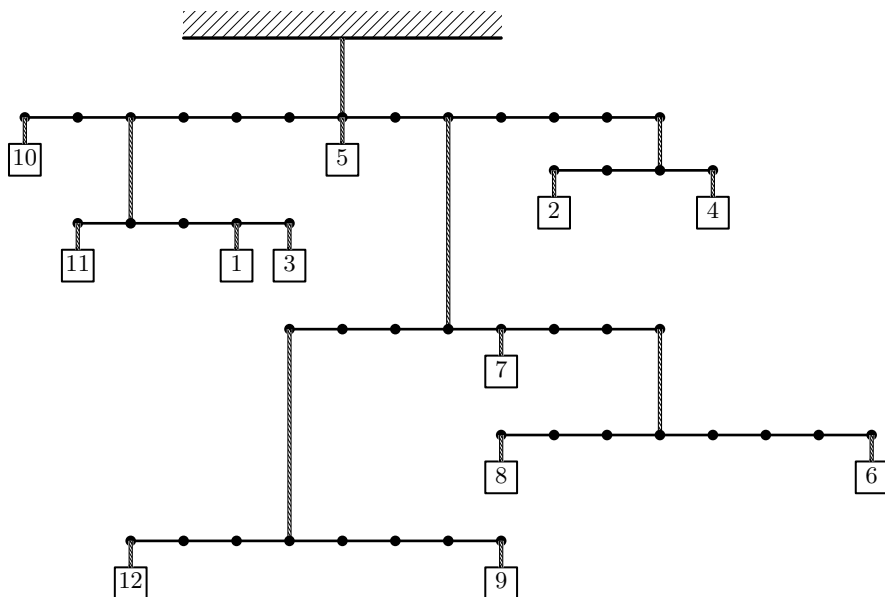
$$6A + 4(C + D + E) = 2(H + I + J + K + L) + 6(F + G),$$

do které dosadíme známé číselné hodnoty a následně ji upravíme na tvar

$$3A + 2(D + E) = 20 + 3(F + G).$$

Pravá strana se bude rovnat 38 nebo 65, výraz $2(D + E)$ nabude 8 nebo 10, výraz $3A$ čísel 6, 9, 12, 15 nebo 30. Z uvedených hodnot (zejména z poměrně velkého rozdílu $2(D + E)$ a pravé strany rovnice) je jasné, že člen $3A$ musí nutně být 30, tedy $A = 10$ kg. Odtud plyne $F = 2$ kg a $G = 4$ kg. Tím následně získáme $D = 1$ kg a $E = 3$ kg. Zbývá nám již jen závaží 5 kg, které dosadíme na místo B .

Pokud chcete, můžete si pro kontrolu přepočítat všechny rovnosti a zkontrolovat, jestli jsme někde náhodou neudělali chybu ☺.



Obr. 3: Řešení úlohy, jednotlivé hmotnosti jsou v kg

Tereza Uhlířová
teri@vyfuk.mff.cuni.cz

Lukáš Fusek
lukasf@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.