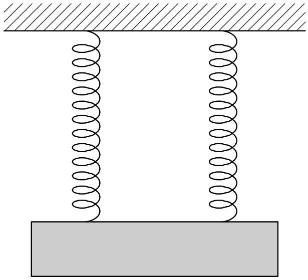
Úloha III.4 ... Pružinková

8 bodů; průměr 4,45; řešilo 56 studentů

Jednou šla Simča s Gabčou nakupovat vánoční dárky. Navštívily i železářství, odkud si Gabča odnesla nejnovější model pružinky. Pružinka měřila l_0 v nenataženém stavu. Když přišla Gabča domů, na pružinku zavěsila závaží s hmotností m. Tím se pružinka prodloužila na novou délku l.

1. *Simča Gabči poradila, že tuhost pružinky k vypočítá jako podíl síly, která pružinku natahuje, a změny délky pružinky. Napište vzorec pro tuhost k pomocí zadaných hodnot a určete její jednotku v soustavě SI.*
2. *Za nějaký čas se Gabča začala s jednou pružinkou nudit. Proto vzala nůžky a přestřihla pružinku na dva stejně dlouhé kusy. Simču by zajímalo, jakou tuhost má takto vyrobená pružinka.*
3. *Jaká je celková tuhost soustavy pružinek, když zapojíme Gabčiny pružinky vedle sebe, jako na obrázku?*
4. *Simči se pružinka tak zalíbila, že si musela i ona jednu koupit. Rozstřihla ji na dvě nestejně dlouhé části s tuhostmi k_1 a k_2. Jak souvisí tyto tuhosti s původní hodnotou k?*



Obr. 1: Gabčiny pružinky

1. Tuhost k

Pokud jsme si zadání přečetli pozorně, neměli bychom mít problém daný vztah zapsat

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{mg}{l - l_0}\,,$$

kde k je tuhost pružiny, F síla působící na pružinu, Δl nám říká, jak se pružina natáhla. V rozepsaném vztahu se nám pak objevují veličiny hmotnost pružiny m, tíhové zrychlení g, délka natažené pružiny l a původní délka pružiny l_0.

Nesmíme však zapomenout uvést jednotku v soustavě SI, což si odvodíme z našeho vztahu

$$[k] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

2. Poloviční pružinka

Odpověď nám poskytne krátká úvaha. Působíme-li silou F na konce pružiny, musí ze zákonu akce a reakce tato síla působit na konce každé smyčky pružinky. Proto se každá smyčka pružinky natáhne o malou vzdálenost δ. Výsledné prodloužení pružiny Δl pak bude dáno počtem smyček, čím delší pružina, tím více smyček, a tedy i tím větší prodloužení. Poloviční pružina bude mít poloviční počet oček a její prodloužení bude rovněž poloviční. Z definice k v prvním bodě tak dostáváme dvojnásobnou tuhost pro poloviční pružinu.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i pomocí Hookova zákona, který popisuje mimo jiné i deformaci pružinek. V učebnicích fyziky ho naleznete ve tvaru

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0}\,,$$

kde σ je tzv. normálové napětí (což je síla F působící na kolmý průřez pružiny S) a E je konstanta zvaná *modul pružnosti v tahu.*

Nyní zákon upravíme tak, aby se co nejvíce podobal našemu vztahu z první části

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}\,,$$
$$\frac{F}{\Delta l} = E\frac{S}{l_0} = k\,.$$

Z Hookova zákona jsme získali vztah pro samotnou tuhost pružiny závisející jen na tvaru a materiálu pružiny.

Takže co se stane, když budeme mít pružinu ze stejného materiálu a se stejným průměrem, ale o poloviční délce? Modul pružnosti zůstane stejný, takže můžeme dosadit do odvozeného vztahu, čímž dostaneme tuhost nové pružiny k_1

$$k_1 = E\frac{S}{\frac{l_0}{2}} = 2E\frac{S}{l_0} = 2k\,.$$

3. Soustava pružinek

Pokud na dvě stejné pružiny spojené *paralelně* (tzn. vedle sebe) zavěsíme závaží, musí platit, že jejich prodloužení bude stejné. Kdyby tomu tak nebylo a jedna z pružin by byla natažena více, působila by na ni větší síla než na druhou, méně nataženou.

Soustava pružiny-závaží je v klidu, a proto musí platit rovnost: tíhová síla závaží (působící směrem dolů) je stejně velká jako součet sil pružinek, které působí nahoru

$$mg = k_1\Delta l_1 + k_1\Delta l_1 = 2k_1\Delta l_1\,, \tag{1}$$

kde Δl_1 je prodloužení pružin, když je celá soustava v klidu. Když začneme na závaží působit silou F_1, vychýlíme jej o vzdálenost y z původní polohy. Aby byla celá soustava v rovnováze, musí pružinky působit stejně velkou silou v opačném směru než síly F_1 a $F_G = mg$

$$F_1 + mg = 2k_1\left(\Delta l_1 + y\right)\,.$$

Od této rovnice odečteme rovnost (1) a dostáváme

$$F_1 = 2k_1 y\,.$$

Takže soustavu pružin můžeme nahradit jedinou pružinou s tuhostí $2k_1$.

4. Různě dlouhé pružinky

Pro původní pružinu se zavěšeným závažím o hmotnosti m platí

$$mg = k\Delta l\,.$$

Pokud pružinu rozstřihneme a její části znovu zavěsíme za sebou se závažím, síla působící na konce obou pružin musí být stále stejná. To znamená, že spodní pružina bude natahována silou $F_G = mg$ a, aby zůstala v klidu, bude na ni reagovat tím, že sama vytvoří stejně velkou sílu opačného směru. Aby však pružinka nespadla, bude horní pružinku natahovat také silou $F_G = mg$, což způsobí stejnou reakci jako u spodní pružiny. Celou situaci můžeme zapsat takto

$$mg = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 \,, \tag{2}$$

kde k_1 a k_2 jsou tuhosti nových pružin a Δl_1 a Δl_2 jsou jejich různá prodloužení.

Pokud na soustavu začneme působit silou F_n, prodlouží se první pružina o y_1 a druhá o y_2. Celkově se soustava prodlouží o vzdálenost $y = y_1 + y_2$. Obě pružiny pak budou napínány silou

$$F_n + mg = k_1 \left(\Delta l_1 + y_1\right) = k_2 \left(\Delta l_2 + y_2\right) \,,$$

takže po odečtení rovnice (2) dostáváme

$$F_n = k_1 y_1 = k_2 y_2 \,.$$

Kromě tohoto vztahu ale stále platí i $F_n = ky$, protože rozstřihnuté pružinky zavěšené se závažím za sebou se chovají stejně jako jedna pružina s původní tuhostí.

Abychom však dané tuhosti mohli získat ze vztahu $y = y_1 + y_2$, musíme si jednotlivá prodloužení vyjádřit

$$y_1 = \frac{F_n}{k_1} \,, \qquad y_2 = \frac{F_n}{k_2} \,, \qquad y = \frac{F_n}{k} \,.$$

Nyní tyto výrazy do vztahu dosadíme a vykrátíme sílu F. Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{F}{k} &= \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \,, \\ \frac{1}{k} &= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \,. \end{aligned}$$

Díky tomuto vztahu si můžeme všimnout, že pokud zavěsíme dvě pružinky za sebou, bude jejich výsledná tuhost *menší* než původní tuhosti pružinek. V opačném případě, kdy přestřihneme jednu dlouhou pružinu, získáme dvě kratší, avšak obě s větší tuhostí oproti původní, dlouhé.

Karolína Šromeková
`cajka@vyfuk.mff.cuni.cz`

Radka Štefaníková
`radka@vyfuk.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.