VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník III číslo 2/7

Milí kamarádi,

ve svých rukou držíte v pořadí druhou brožurku Výfuku. Naleznete v ní zadání druhé série. Výfučtení pojednává o velmi zajímavém tématu, a sice o tom, jak funguje fyzika kapalin a tlaků v nich.

Do první série se zapojilo celkově 149 žáků, za což jsme velmi rádi. Děkujeme za projevený zájem. Na zpracování takto velkého množství řešení již pilně pracujeme. Okomentované a obodované řešení byste měli obdržet s další brožurkou, ve které naleznete i příslušná vzorová řešení a pořadí. To, jak jste dopadli, ale můžete vidět mnohem dřív na našich webových stránkách, pozorně je proto sledujte. Vzorová řešení by na stránkách již měla být, tak neváhejte a přečtěte si je, dokud máte své myšlenkové postupy ještě v paměti.

Anketa

V obálce byste měli najít malý barevný anketní lístek. Ptáme se vás, zda chcete dostávat po každém ročníku Ročenku Výfuku, která by kromě všech zadaní a řešení obsahovala i krátké reportáže z akcí Výfuku. Prosíme o vyplnění této ankety a zaslání s řešeními druhé série.

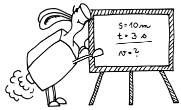
Podzimní setkání

Srdečně vás zveme na druhé Podzimní setkání Výfuku, jež se uskuteční ve dnech 6.–8. 12. 2013 v DDM Praha 3 – Ulita (`http://www.ulita.cz/`). Jedná se o víkendovou akci, na které máte jedinečnou šanci potkat kamarády z tábora, ale také poznat nové lidi s podobnými zájmy. Pozvánku s podrobnějšími informacemi byste měli mít přibalenou v obálce. Nestalo-li se tak, ale o setkání zájem máte, určitě se nám ozvěte na známou e-mailovou adresu `vyfuk@fykos.cz`.

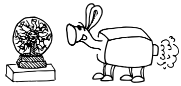
MFnáboj

MFnáboj – matematicko-fyzikální soutěž pro až čtyřčlenné týmy ze základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií – se koná 15. 11. 2013. A to jak v Praze, tak na dalších místech po České republice (Brno, Ostrava, Karlovy Vary, Hradec Králové, České Budějovice a Bílovec). Neváhejte a přihlašujte se! A řekněte o akci svým spolužákům a kamarádům! S touto brožurkou vám přišel i letáček, který předejte svému učiteli nebo dejte na nástěnku ve škole. Podrobnosti o soutěži a přihlášku najdete na zbrusu nových stránkách `http://naboj-junior.fks.sk/cz/`. Případné dotazy pište na `mfnaboj@fykos.cz`. Budeme se na vás těšit!

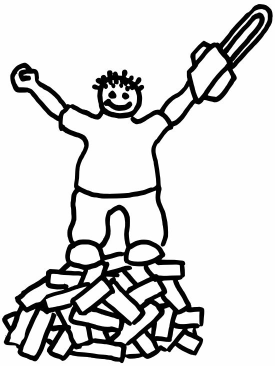
Organizátoři



Zadání II. série



Termín uploadu: 3. 12. 2013 20.00
Termín odeslání: 2. 12. 2013



Úloha II.1 ... Řezání tyčí firmou Přířez — 3 body

Franta z Rána staví malý zahradní plot. Použije na něj 320 tyčí o délce $l_1 = 580\,\mathrm{mm}$. Ve firmě Přířez prodávají tyče o délce $l = 4\,\mathrm{m}$. Franta si tyto tyče rozřeže na požadovanou délku. Na řez spotřebuje 2 mm délky.

Kolik si má koupit čtyřmetrových tyčí?

Úloha II.2 ... Lungernerseerský běh — 5 bodů

Každý rok se ve Švýcarsku pořádá Běh kolem jezera Lungernersee. Letos se běhu zúčastnily i Verča s Terkou. Na rozdíl od ostatních běžců si holky zvolily zajímavou techniku. Nejdříve začne Verča běžet s konstantním zrychlením a a Terka se zrychlením $2a$. V polovině času si zrychlení vymění – stejně dlouho bude pak Verča běžet se zrychlením $2a$, Terka se zrychlením a. Po akci se Verča chválila, že uběhla 5 km. S jakou uběhnutou vzdáleností se může pochválit Terka?

Velmi slušný bodový zisk dostanete i tehdy, když pouze rozhodnete, zda-li Terka uběhne více nebo méně než Verča. Odpověď ale musí být dobře odůvodněna.

Úloha II.3 ... Řetízek — 6 bodů

Čajka dostala k narozeninám řetízek. Byl $l = 20\,\mathrm{cm}$ dlouhý, složený z $n = 50$ oček a vážil $m = 100\,\mathrm{g}$. Dále Čajka změřila, že koeficient statického tření mezi řetízkem a nočním stolkem je $f = 0{,}3$. Pak nechala řetízek viset přes okraj stolku. Kolik *celých* oček může ze stolku viset, aby řetízek nesklouzl dolů?

Úloha II.4 ... Armageddon — 9 bodů

Mišo se doslechl, že dne 21. 12. 2013 dojde ke zvláštnímu úkazu. Mars, Slunce, Země a Měsíc se budou nacházet na jedné přímce. Kdyby náhodou tento úkaz nevedl ke světové apokalypse, Mišo si řekl, že spočítá, za jaký čas dojde ke stejné konfiguraci (všechna tělesa budou na jedné přímce, ne nutně v tomto pořadí) znovu. Zkuste to i vy:

1. Vyjádřete úhel φ, který opíše Mars za obecný čas t.
2. Nakreslete obrázek, jak bude vypadat nejbližší setkání Marsu, Země a Slunce na jedné přímce. Jaký úhel musí opsat Země a jaký Mars?
3. S užitím výsledků předešlých bodů vypočtěte čas T_0, za který dojde k tomuto setkání planet.
4. Jaký úhel za tento čas opíše Měsíc? Bude s planetami také na přímce?

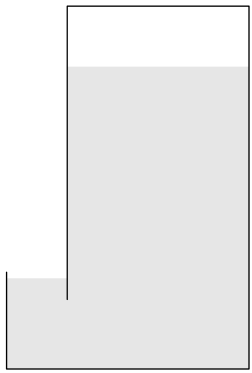
5. Vypočtěte čas T_1, kdy skutečně dojde k dalšímu konci světa.

Země i Mars obíhají kolem Slunce po kruhových dráhách s periodou $T_\mathrm{Z} = 365\,\text{dní}$ a $T_\mathrm{M} = 687\,\text{dní}$. Měsíc obíhá kolem Země rovněž po kruhové dráze s periodou $T_\mathrm{m} = 28\,\text{dní}$. Úplně postačí, když budete i v mezivýsledcích zaokrouhlovat na celé dny.

Úloha II.E ... Neopakovatelný nález — 8 bodů

Tom měl dneska trochu štěstí a na chodníku našel mince o hodnotách 1 Kč a 2 Kč. Chtěl zjistit, z jakého materiálu jsou vyrobeny. Pomůžete mu? Vaším úkolem bude *co nejpřesněji* změřit hustotu jedno a dvoukorunové mince. Určitě se pokuste o odhad nebo i výpočet chyby měření. Naměřené hustoty porovnejte. Jsou mince vyrobeny ze stejného materiálu?

Úloha II.C ... Vodo-vodo-vodní — 9 bodů



Obr. 1: Napajedlo

1. Oblíbená legenda o Archimedovi říká, že objev onoho zákona mu pomohl vyřešit problém, který mu uložil král. Archimedes měl za úkol zjistit, zda-li je královská koruna z čistého zlata nebo ze zlata smíchaného se stříbrem. Učenec zjistil, že rozdílné složení má za následek rozdílnou změnu hladiny po ponoření koruny do vody.

   Zkusme tuto metodu prozkoumat na malých špercích se stejnou hmotností $m = 20\,\mathrm{g}$. Jeden je ze zlata s hustotou $\varrho_\mathrm{Au} = 19\,300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, druhý ze stříbra s hustotou $\varrho_\mathrm{Ag} = 10\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Nádoba, ve které budeme šperky testovat, má tvar válce s poloměrem podstavy $r = 2\,\mathrm{cm}$. Jaký bude rozdíl výšek hladin Δh mezi ponořením zlatého a stříbrného šperku? Je tato metoda přesná?
2. Katka bydlí ve městě, které je zásobováno pitnou vodou z nedaleké vodárny na kopci. Čerpadlo ve vodárně čerpá vodu do potrubí pod tlakem $p = 500\,\mathrm{kPa}$. Inženýři se Katky zeptali, jakou nejvyšší obytnou budovu lze ve městě postavit, aby i v nejvyšším patře mohla téct voda z kohoutku. Vypočítejte to i vy. Kopec, na kterém stojí vodárna, má výšku $H = 100\,\mathrm{m}$.
3. Jarda chová andulky. Jednou si vyfotil jejich napajedlo (viz obrázek). Nešlo mu do hlavy, proč voda v napajedle jednoduše nevyteče ven. Pokuste se tento fenomén vysvětlit vy – své kroky fyzikálně odůvodněte.

Výfučtení: Kapaliny aneb Hydročtení

Proč studujeme kapaliny?

Víc než 70 % povrchu Země tvoří voda. Ta je nezbytnou součástí života na Zemi – rostliny, zvířata a ani my bychom bez ní nepřežili.

Kapaliny jsou ovšem zajímavé i z fyzikálního hlediska. Přenos sil a energie v kapalinách se liší od chování plynů nebo tuhých látek. Nemluvě o tom, že kapaliny se vyznačují celou řadou zajímavých paradoxů.

Jak se chovají

Kapaliny se, stejně jako všechny ostatní látky, skládají z atomů a molekul. Avšak tyto molekuly jsou mezi sebou vázané pouze nepatrně a nemají žádnou krystalovou mřížku. Ba naopak, podobně jako molekuly plynu se pohybují a srážejí. Průměrná vzdálenost molekul v kapalině je menší než v plynu. Rychlost částic je závislá na teplotě kapaliny. Čím víc nějakou kapalinu zahřejeme, tím větší mají její molekuly rychlost a intenzivněji do sebe naráží. Navenek kapalina zvětší svůj objem. Takto mimochodem funguje rtuťový nebo lihový teploměr.

Kapaliny jsou na rozdíl od plynů nestlačitelné. Přesněji řečeno – jsou stlačitelné, ale pouze velmi málo. Proto se při silovém působení na hladinu nebude kapalina stlačovat, ale bude v ní růst tlak.

Často se říká, že kapaliny jsou charakteristické tím, že zaujímají tvar nádoby, ve které jsou umístěny. Víte ale, proč tomu tak je? Každý fyzikální systém, tedy i kapalina v nádobě, se snaží vždy zaujmout stav s nejmenší energií. Překvapivě stav s nejmenší energií nastane tehdy, když je kapalina rozmístěna po celém dně nádoby – v té chvíli je hladina výšky minimální. Nejmenší „energetická“ hladina zase nastane tehdy, když je kolmá na směr působící tíhy, tedy ve vodorovném směru.

Abychom mohli (jako fyzici) jednoznačně identifikovat jakoukoliv kapalinu, potřebujeme znát fyzikální veličiny, které ji charakterizují. Každá kapalina má charakteristické veličiny, jež jsou hustota ϱ, viskozita η a povrchové napětí σ.

Viskozita nám říká, jak velké je vnitřní tření v kapalině. Velkou hodnotu viskozity má například med. Proto se jen velmi těžko míchá a ještě hůře teče. Naopak nízkou viskozitu má voda. Mluvili jsme o tom, že kapaliny mají i další zvláštní vlastnosti. Například známe i kapaliny, které mají přesně nulovou viskozitu. Takovéto kapaliny se nazývají *supratekuté*. Příklad supratekuté kapaliny je zkapalněné helium při teplotě asi $1\,\mathrm{K}$. Toto helium teče bez odporu i těmi nejmenšími otvory a někdy vytéká po stěnách nádoby do okolí. Fyzikální princip, který stojí za supratekutostí, je ale velmi složitý a učí se až na vysoké škole.

Povrchové napětí je veličina, která popisuje síly působící mezi jednotlivými molekulami. Přesněji řečeno popisuje sílu, která drží hladinu pohromadě. Když má kapalina velké povrchové napětí, po vylití na hladký povrch vytvoří malé kapky, které se rády spojují do větších. Kapalinou, která má velké povrchové napětí, je například rtuť. Naopak malé povrchové napětí má například voda se saponátem. Tento roztok potom tvoří velké, placaté kapky a snadno dokáže smáčet povrch. Jednotkou povrchového napětí je N·m.

Hydrostatický tlak

Na popsání *stavu* nějaké kapaliny často používáme tlak. My se budeme zaobírat pouze tlakem v neproudící kapalině, tedy tlakem hydrostatickým. Kromě něj ještě známe tlak způsobený vnější silou, hydrodynamický tlak a další.

Tlak je definovaný jako podíl síly na plochu, na kterou působí

$$p = \frac{F}{S}\,.$$

Jednotkou tlaku je pascal. Je pojmenovaný podle známého francouzského fyzika Blaise Pascala. Pascal můžeme upravit na součin základních jednotek SI

$$[p] = \mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg{\cdot}m}}{\mathrm{m^2{\cdot}s^2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m{\cdot}s^2}} = \mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Hydrostatický tlak způsobuje tíhové působení kapaliny nacházející se nad nějakým místem. Tento tlak samozřejmě působí i na každý předmět, který do kapaliny ponoříme. Máme předmět ponořený v hloubce h v kapalině o hustotě ϱ. Tlak, který působí na toto těleso, bude z definice

$$p_\mathrm{h} = \frac{F_g}{S} = \frac{m_\mathrm{k} g}{S} = \frac{V_\mathrm{k}\varrho g}{S} = \frac{Sh\varrho g}{S} = h\varrho g\,.$$

Dostali jsme základní vzorec celé hydrostatiky. Zajímavé je, že tento vzorec vůbec nezávisí na tvaru nádoby. Představme si sud plný vody, ze kterého vede dlouhá tenká hadička. Pokud hadičku postavíme a začneme do ní lít vodu, tlak v sudě bude velmi rychle stoupat (protože se mění výška hladiny vody). Dokonce se může stát, že sud tlak nevydrží a praskne, přestože jsme přilili pouze malý objem vody. Toto zvláštní chování nazýváme hydrostatický paradox.

Pascalův zákon

Na kapalinu působí skoro vždy nějaká vnější síla. Nejčastěji je to síla atmosférického tlaku, ale někdy můžeme na kapalinu působit silou vědomě, například písty nebo pružnými membránami. Představme si, že tato síla způsobuje v kapalině tlak $p_0 = F_\mathrm{v}/S$, kde S je obsah povrchu kapaliny. U hladiny se molekuly vlivem tohoto tlaku přiblíží k sobě, začnou se víc srážet a tlačit na okolní částice. Částice se tímto způsobem rychle[1] dostanou do stavu, kdy je ve všech místech stejný tlak. Pokud tedy na kapalinu působíme tlakem p_0, tlak v celém objemu kapaliny se zvýší právě o hodnotu rovnou p_0.

Toto jednoduché zjištění se nazývá Pascalův zákon a má velmi široké využití v technice. Každý hydraulický přístroj (písty v bagrech, jeřábech, lisech apod.) funguje na tomto principu. Namísto vody se v nich používají různé hydraulické oleje, protože mají lepší hydromechanické vlastnosti (například zmiňovanou viskozitu).

Archimédův zákon jak ho neznáte

Každý už určitě někdy slyšel známou definici Archimédova zákona:

> *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou rovnající se tíze kapaliny tělesem vytlačené.*

Zdá se to jako nudný zákon. Ve skutečnosti je ale velmi zajímavý. Tím hlavní důvodem je, že tento zákon NEPLATÍ! Neplatnost si ukážeme na jednoduchém příkladu:

Představme si zkumavku o objemu $10\,\mathrm{cm}^3$, ve které máme $2\,\mathrm{cm}^3$ vody.[2] Následně do zkumavky vložíme válec o objemu $V_\mathrm{v} = 5\,\mathrm{cm}^3$, který je jen o trochu užší než stěny zkumavky. Navíc je vyrobený ze dřeva o hustotě $\varrho_\mathrm{v} = 0{,}5\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Všichni se shodneme na tom, že takovýto válec bude ve zkumavce plovat, protože hustota vody ($\varrho_\mathrm{k} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$) je větší než hustota dřeva. To,

[1] Rychlost šíření tlaku ve vodě dokonce známe. Je to rychlost zvuku ve vodě, přibližně $1\,500\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

[2] Jenom připomínáme, že $1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{ml}$.

že bude plovat, znamená, že tíha válce bude vyrovnávána vztlakovou silou. Archimédův zákon zase říká, že tato síla je rovná tíze vytlačené kapaliny. Její velikost je

$$F = m_\mathrm{v} g = \varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} g\,.$$

Z tíhy vytlačené kapaliny si lehce dopočítáme objem

$$V_\mathrm{k} = \frac{m_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{k}} = \frac{F}{g\varrho_\mathrm{k}} = \frac{\varrho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} g}{g\varrho_\mathrm{k}} = V_\mathrm{v}\,\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{k}}\,,$$

$$V_\mathrm{k} = 5\,\mathrm{cm}^3 \cdot \frac{0{,}5\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}}{1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} = 2{,}5\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Vyšlo nám, že dřevěný válec svým objemem vytlačí víc vody, než bylo původně ve zkumavce, což je jasný nesmysl.

Archimédův zákon přesto funguje (lodě se nepotápějí). Zkusme proto najít jeho „lepší“ odvození. Protože zbytek textu pojednává o tlacích, nepřekvapí nás, že i Archimédův zákon plyne z rozboru tlakových sil působících na ponořené těleso. Pro jednoduchost si zvolíme kvádr s plochou podstavy S a výškou v. Označme $\boldsymbol{F}_1$ tlakovou sílu působící na spodní podstavu, $\boldsymbol{F}_2$ tlakovou sílu působící na vrchní podstavu a $\boldsymbol{F}_3$ a $\boldsymbol{F}_4$ tlakové síly, které působí proti sobě na boční stěny. Nakonec ještě označíme hloubku, ve které je kvádr ponořený, jako h.

Ze zkušenosti víme, že těleso ponořené do stojící vody není unášeno ve vodorovném směru. Musí proto platit, že vodorovně působící síly se vyruší

$$\boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = 0\,.$$

S použitím trochu pokročilejší matematiky můžeme odvodit, že toto tvrzení platí pro těleso *libovolného* tvaru. Ve svislém směru nám už zůstaly jen síly F_1 a F_2. Tyto síly působí proti sobě. Pro zjištění výsledné síly je od sebe odečteme. Za tlaky si dosadíme už známý hydrostatický tlak. Dostáváme

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F_1 - F_2 = p_1 S - p_2 S\,,\\
\Delta F &= (h+v)\,\varrho_\mathrm{k} g S - h\varrho_\mathrm{k} g S = \varrho_\mathrm{k} g S\,(h + v - h)\,,\\
\Delta F &= \varrho_\mathrm{k} g S v = \varrho_\mathrm{k} g V\,.
\end{aligned}$$

Úplně nakonec tento rozdíl tlakových sil působících shora a zdola pojmenujeme jako vztlakovou sílu a formulujeme přesnější znění Archimédova zákona:

> *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která je rovna rozdílu tlakových sil působících shora a zdola.*

Tato definice, jak se můžete velmi snadno přesvědčit, připouští plování dřevěného válce ve zkumavce s trochou vody.

Jak jsme si ukázali, fyzikální vyjádření vztlakové síly $F_\mathrm{vz} = \varrho_\mathrm{k} g V$ sice vypadá jako tíha nějaké kapaliny, ale původ této síly je někde jinde. Určitě je to ale užitečné vyjádření. Znovu vám prozradíme, že pro libovolný tvar tělesa bude mít výsledná vztlaková síla právě takovéto vyjádření – namísto komplikovaného sčítání tlakových sil si tedy můžeme zapamatovat jednoduchý vzorec.

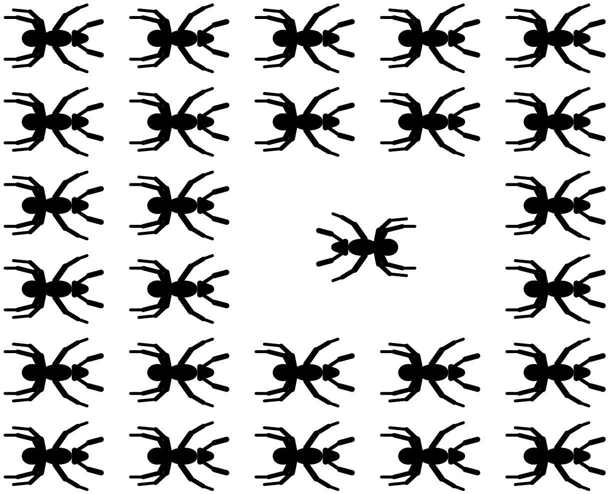
Ukažme si použití tohoto vzorce v praxi: představme si nějaké těleso o hustotě ϱ_t a objemu V, které ponoříme do kapaliny o hustotě ϱ_k. Celková síla působící na těleso F je výslednice těchto dvou sil (síly směřující nahoru jsou kladné)

$$
\begin{aligned}
F &= F_\mathrm{vz} - F_g\,,\\
F &= V\varrho_\mathrm{k} g - V\varrho_\mathrm{t} g\,,\\
F &= Vg\left(\varrho_\mathrm{k} - \varrho_\mathrm{t}\right)\,.
\end{aligned}
$$

O tom, jestli těleso bude plovat, nebo nebude, rozhoduje jeho hustota.

- Je-li $\varrho_\mathrm{t} = \varrho_\mathrm{k}$, těleso plove v kapalině,
- je-li $\varrho_\mathrm{t} > \varrho_\mathrm{k}$, těleso klesne ke dnu,
- je-li $\varrho_\mathrm{t} < \varrho_\mathrm{k}$, těleso plove na hladině.

O kapalinách se však dá napsat ještě mnohem víc. Zajímavé téma je například proudění kapalin – hydrodynamika. Takováto témata však vyžadují pokročilé fyzikální a matematické znalosti, takže se o nich dozvíte až na střední škole (nebo na nějaké akci Výfuku).

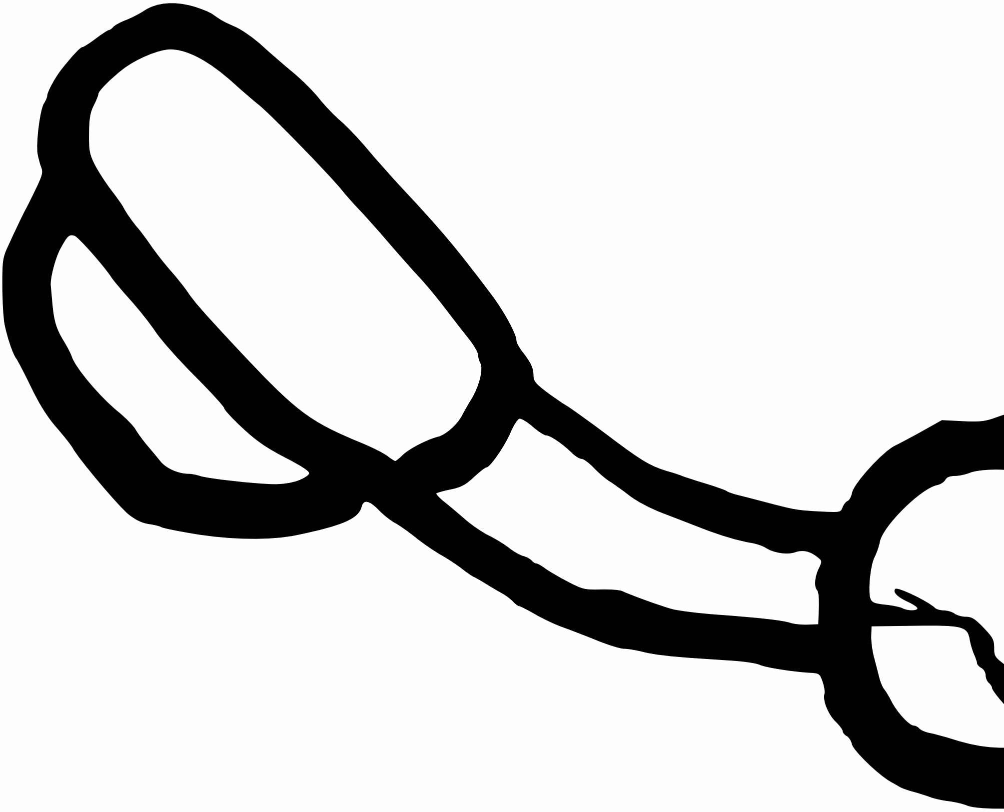


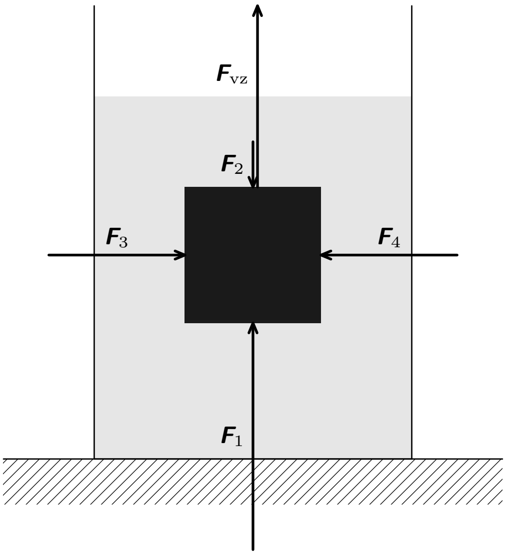
Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.





Obr. 2: Znázornění sil působících na těleso