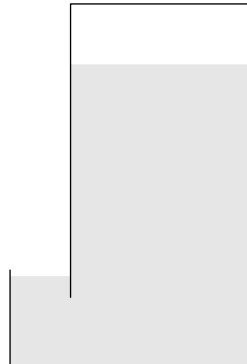


Úloha II.C ... Vodo-vodo-vodní

9 bodů; (chybí statistiky)

1. Oblíbená legenda o Archimedovi říká, že objev onoho zákona mu pomohl vyřešit problém, který mu uložil král. Archimedes měl za úkol zjistit, zda-li je královská koruna z čistého zlata nebo ze zlata smíchaného se stříbrem. Učenec zjistil, že rozdílné složení má za následek rozdílnou změnu hladiny po ponoření koruny do vody.

Zkusme tuto metodu prozkoumat na malých špercích se stejnou hmotností $m = 20\text{ g}$. Jeden je ze zlata s hustotou $\rho_{\text{Au}} = 19\,300\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, druhý ze stříbra s hustotou $\rho_{\text{Ag}} = 10\,500\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Nádoba, ve které budeme šperky testovat, má tvar válce s poloměrem podstavy $r = 2\text{ cm}$. Jaký bude rozdíl výšek hladin Δh mezi ponořením zlatého a stříbrného šperku? Je tato metoda přesná?



Obr. 1: Napajedlo

2. Katka bydlí ve městě, které je zásobováno pitnou vodou z neďaleké vodárny na kopci. Čerpadlo ve vodárně čerpá vodu do potrubí pod tlakem $p = 500\text{ kPa}$. Inženýři se Katky zeptali, jakou nejvyšší obytnou budovu lze ve městě postavit, aby i v nejvyšším patře mohla téct voda z kohoutku. Vypočítejte to i vy. Kopec, na kterém stojí vodárna, má výšku $H = 100\text{ m}$.
3. Jarda chová andulky. Jednou si vyfotil jejich napajedlo (viz obrázek). Nešlo mu do hlavy, proč voda v napajedle jednoduše nevyteče ven. Pokuste se tento fenomén vysvětlit vy – své kroky fyzikálně odůvodněte.

1. Aby sme mohli použiť Archimedov zákon, musíme si najskôr vypočítať objem jednotlivých šperkov podľa známeho vzorca

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Vidíme, že hustota zlata aj striebra je väčšia ako hustota vody $\rho_{\text{Ag}} > \rho_{\text{voda}}$ a $\rho_{\text{Au}} > \rho_{\text{voda}}$. Oba šperky preto klesnú ku dnu a k objemu vody v nádobe musíme teda pripočítať celý objem šperku.

Keďže voda v nádobe má tvar valca, zaujíma nás, ako sa zmení výška valca, ak jeho objem vzrastie o ΔV . Pre objem valca platí vzorec

$$V = S_{\text{podstava}}h = \pi r^2 h$$

Ak si označíme zmenu výšky Δh , pre zväčšený valec bude platiť

$$V + \Delta V = \pi r^2 (h + \Delta h),$$

$$V + \Delta V = V + \pi r^2 \Delta h,$$

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{\pi r^2}.$$

Aby sme dostali výsledný rozdiel hladín medzi jednotlivými šperkami, musíme hodnoty rozdielov hladín pre šperk zo zlata a striebra od seba odčítat.

$$\Delta H = \Delta h_{\text{Ag}} - \Delta h_{\text{Au}} = \frac{V_{\text{Ag}}}{\pi r^2} - \frac{V_{\text{Au}}}{\pi r^2} = \frac{V_{\text{Ag}} - V_{\text{Au}}}{\pi r^2}.$$

Ešte si môžeme vyjadriť objem pomocou hustoty, čím dostávame

$$\Delta H = \frac{\frac{m}{\rho_{\text{Ag}}} - \frac{m}{\rho_{\text{Au}}}}{\pi r^2} = \frac{\frac{0,02 \text{ kg}}{10\,500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}} - \frac{0,02 \text{ kg}}{19\,300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}}}{\pi (0,02 \text{ m})^2} \doteq 0,7 \text{ mm}.$$

Ako vidíme, je to iba veľmi malý rozdiel, skoro nepozorovateľný voľným okom. Táto metóda určovania je teda veľmi nepresná.

2. Na túto úlohu existujú dva uhly pohľadu

- (a) Vieme si vypočítať, aký bude tlak v potrubí v údolí (pod kopcom) pri vstupe do budovy. Hydrostatický tlak v údolí bude jednoducho $\rho g H$. K tomuto tlaku sa ale vďaka Pascalovmu zákonu pripočítava tlak čerpadla p .

$$p_u = p + \rho g H.$$

Ak chceme, aby nám v nejakej výške tiekla voda z kohútika, musí platiť, že tlak vody v kohútiku musí byť väčší ako atmosférický tlak. Pri nižšom tlaku nám z kohútika nepotečie nič, pri vyššom tlaku nám voda potečie väčšou rýchlosťou.¹

Maximálnu výšku určíme použitím spomínanej podmienky. Samozrejme platí, že vo výške h nad údolím nám tlak poklesne o hodnotu $\rho g h$.

$$p_u - \rho g h_{\text{max}} > p_a,$$

$$h_{\text{max}} \rho g < p_u - p_a,$$

$$h_{\text{max}} < \frac{p + \rho g H - p_a}{\rho g},$$

$$h_{\text{max}} < \frac{5 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 100 \text{ m} - 101 \cdot 10^3 \text{ Pa}}{1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 139,9 \text{ m}.$$

Hodnotu atmosférického tlaku sme našli v tabuľkách. Vidíme, že v meste môže byť budova vysoká skoro 140 m.

- (b) Namiesto tvrdého počítania si vieme pomôcť aj úvahou. Budeme vychádzať z predstavy spojených nádob: vodáreň je potrubím spojená s našou budovou a tvoria spojenú nádobu. Navyše si na chvíľku odmyslíme prítomnosť atmosférického tlaku.

Ak by sme chceli budovu postaviť, ale čerpadlo by nefungovalo, tak voda by vystúpila len do výšky H . Teraz si zapneme zároveň čerpadlo a atmosférický tlak. Pre nás má zapnutie atmosférického tlaku rovnaký efekt, ako keby čerpadlo vyvíjalo tlak len $p - p_a$. Tento tlak nám vodu vytlačí do výšky

$$h = \frac{p - p_a}{\rho g}.$$

Výsledná výška je daná súčtom

$$h_{\text{max}} = H + h.$$

Lahko si môžete overiť, že sme dostali výsledok rovnaký ako v prípade (a).

¹ Je to dôsledok tzv. Bernoulliho zákona, o ktorom sa určite časom dozviete omnoho viac.

3. Zamysleme sa nad silami, ktoré pôsobia na našu kvapalinu. Vidíme, že na hore v napájadle je nejaký vzduch.² Ten bude zjavne hrať veľkú rolu, pretože pôsobením tiažovej sily kvapaliny vznikne vo vzduchu v nádobe podtlak. To znamená, že tlak vzduchu vnútri je menší ako je okolitý atmosférický tlak.

Tento vzduch pôsobí na kvapalinu tlakom p . Vďaka Pascalovmu zákonu sa tento tlak prenáša celým objemom vody v napájadle až po otvorený koniec napájadla. No tu pôsobí opačným smerom práve atmosférický tlak p_a . Povedali sme si ale, že platí $p_a > p$, teda atmosférický tlak vlastne tlačí vodu do napájadla! Voda v napájadle sa však nehýbe. To znamená, že na voľnú hladinu nemôže pôsobiť žiadna výsledná sila. Chýbajúci rozdiel síl (resp. tlakov) nám však zaručuje hydrostatický tlak – hladina v nádobe je totiž vyššie, ako voľná hladina vody na otvorenom konci, takže k tlaku p sa pripája aj hydrostatický tlak $\rho g \Delta h$. Rozdiel výšok hladín Δh sa ustáli na takej hodnote, aby tlaky (a teda aj tlakové sily) pôsobiace na voľnú hladinu zdola a zhora boli rovnaké.³ Preto voda nevytečie z napájadla.

Michal Červeňák
miso@vyfuk.mff.cuni.cz

Patrik Švančara
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²Tento vzduch sa tam dostáva tým, že andulky pri pití vypúšťajú do vody bublinky.

³Ak by to tak nebolo, tak by z napájadla začala vytekať voda dovtedy, kým by rovnováha tlakov nenastala.