

Úloha II.4 ... Armageddon

9 bodů; průměr 3,58; řešilo 36 studentů

Mišo se doslechl, že dne 21. 12. 2013 dojde ke zvláštnímu úkazu. Mars, Slunce, Země a Měsíc se budou nacházet na jedné přímce. Kdyby náhodou tento úkaz nevedl ke světové apokalypse, Mišo si řekl, že spočítá, za jaký čas dojde ke stejné konfiguraci (všechna tělesa budou na jedné přímce, ne nutně v tomto pořadí) znovu. Zkuste to i vy:

1. Vyjádrete úhel φ , který opíše Mars za obecný čas t .
2. Nakreslete obrázek, jak bude vypadat nejbližší setkání Marsu, Země a Slunce na jedné přímce. Jaký úhel musí opsat Země a jaký Mars?
3. S užitím výsledků předešlých bodů vypočtete čas T_0 , za který dojde k tomuto setkání planet.
4. Jaký úhel za tento čas opíše Měsíc? Bude s planetami také na přímce?
5. Vypočtete čas T_1 , kdy skutečně dojde k dalšímu konci světa.

Země i Mars obíhají kolem Slunce po kruhových dráhách s periodou $T_Z = 365$ dní a $T_M = 687$ dní. Měsíc obíhá kolem Země rovněž po kruhové dráze s periodou $T_m = 28$ dní. Úplně postačí, když budete i v mezivýsledcích zaokrouhlovat na celé dny.

Ak sa niečo otáča alebo obieha, je veľmi užitočné tento pohyb určovať pomocou uhlu φ , ktorý daný objekt opisuje. Rýchlosť, akou sa tento uhol s časom mení, nazývame uhlová rýchlosť. Označuje sa ω a platí pre ňu vzťah

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Na to, aby sme vedeli vyriešiť prvú úlohu, potrebujeme poznať uhlovú rýchlosť Marsu. Tú vieme vypočítať až prekvapivo jednoducho. Vieme, že Mars za dobu obehu (T_M) opíše plný uhol 360° . Uhlová rýchlosť je potom

$$\omega = \frac{360^\circ}{T_M}.$$

Posledné dve rovnosti porovnáme a vyjadríme si uhol φ

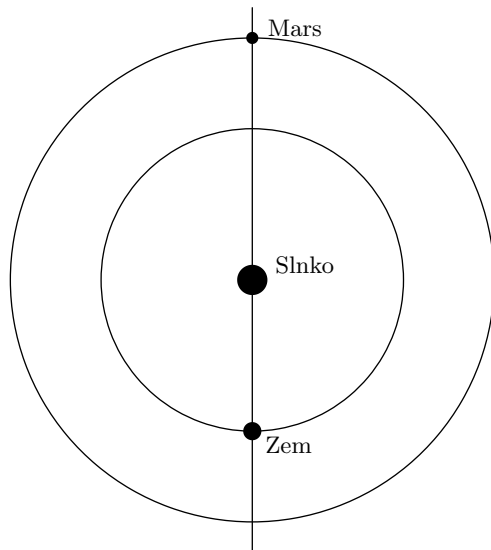
$$\varphi = \frac{360^\circ \cdot t}{T_M}.$$

Na vyriešenie druhej úlohy si najskôr nakreslime, ako vyzerá konfigurácia planét, ktorú pozoroval Mišo. Poradie určíme podľa zadania – za sebou budú Mars, Slnko, Zem a nakoniec Mesiak (obr. 1).

Teraz sa pozrime na rýchlosť obehu planét okolo Slnka. Zo zadania vidíme, že Mars má asi dvakrát väčšiu obežnú dobu, preto obieha okolo Slnka asi dvakrát menšou uhlovou rýchlosťou. Čo to znamená v praxi? Ak Zem opíše štvrt kružnice, Mars za rovnaký čas opíše len osminu. Zem teda vo svojom obehu okolo Slnka predbieha Mars. Je preto jasné, že k ďalšiemu stretnutiu planét a Slnka na jednej priamke dôjde vtedy, keď Zem predbehne Mars o polovicu kružnice. Matematicky povedané, Zem opíše uhol o 180° väčší než Mars. Nič nám nebráni nakresliť si obrázok prvého zákrytu (obr. 2).

Ak by toto bola počiatočná konfigurácia, tak situácia by po prvom zákryte bola úplne rovnaká ako na začiatku nášho zadania. Zem by znova musela opísať rovnaký uhol. Z toho vyplýva, že na počiatočnom postavení planét vôbec nezáleží. Navyiac, planéty sa budú takto stretávať vždy po rovnakom čase T_0 . Tento čas vypočítame tiež veľmi jednoducho. Označme si uhol, ktorý za čas T_0 opíše Zem, ako α , a uhol, ktorý za rovnaký čas opíše Mars, ako β . Odvodili sme si podmienku, že musí platiť

$$\alpha = \beta + 180^\circ.$$



Obr. 1: Zákryt pozorovaný Mišom

Za uhly dosadíme vzťah, ktorý sme odvodili v prvej úlohe

$$\frac{360^\circ \cdot T_0}{T_Z} = \frac{360^\circ \cdot T_0}{T_M} + 180^\circ.$$

Z tejto rovnice si vyjadríme T_0 . Najskôr ju vynásobíme T_M a T_Z a nakoniec hľadaný čas osamostatníme. Ak sme správne počítali, dostávame výsledný vzťah

$$T_0 = \frac{180^\circ \cdot T_M T_Z}{360^\circ \cdot (T_M - T_Z)} = \frac{T_M T_Z}{2(T_M - T_Z)}.$$

Po dosadení dostávame

$$T_0 = \frac{687 \text{ dní} \cdot 365 \text{ dní}}{2(687 \text{ dní} - 365 \text{ dní})} \doteq 389 \text{ dní}.$$

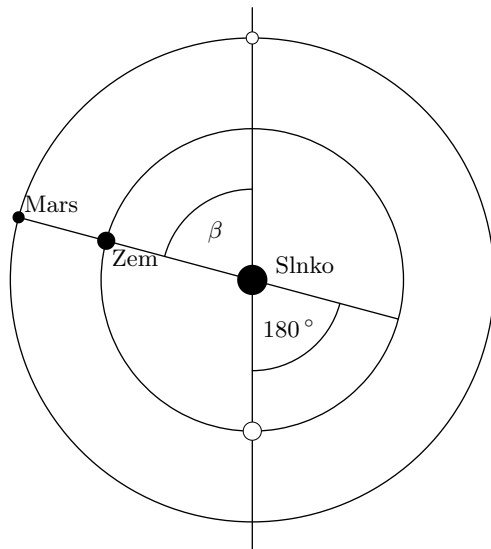
Stále ale nevieme, či za tento čas sa do zákrytu dostane aj Mesiac. Aby sa tak stalo, musí platiť (nakreslite si obrázok), že Mesiac opíše uhol β a ľubovoľný počet polotáčok.¹

Čas t_m , za ktorý Mesiac opíše uhol β , vypočítame zo vzťahu, ktorý sme si odvodili v 1. bode. Za uhol β si dosadíme vyjadrenie zo 4. bodu úlohy

$$\beta = \frac{360^\circ \cdot T_0}{T_M} = \frac{360^\circ \cdot t_m}{T_m},$$

$$t_m = T_0 \frac{T_m}{T_M} = 389 \text{ dní} \cdot \frac{28 \text{ dní}}{687 \text{ dní}} \doteq 16 \text{ dní}.$$

¹Ak urobí Mesiac párny (sudý) počet polotáčok, k zákrytu dojde v rovnakom poradí ako v zadaní. Ak urobí nepárny (lichý) počet polotáčok, k zákrytu doje v poradí Mars, Slnko, Mesiac a až nakoniec Zem.



Obr. 2: Najbližší zákryt

To znamená, že Mesiac bude v zákryte vtedy, ak od prvého zákrytu ubehlo 16 dní a ľubovoľný násobok $(28/2)$ dní = 14 dní (to sú spomínané polotáčky). To znamená, že hľadáme najmenší násobok času T_0 , ktorý po delení číslom 14 dáva zvyšok 2 (pretože v 16 je už jeden násobok čísla 14).

Takúto podmienku spĺňa čas

$$T_1 = 4T_0 = 1\,556 \text{ dní} = 4 \text{ roky } 95 \text{ dní}.$$

Znamená to teda, že síce od Mišovho pozorovania ubehnú 3 zákryty Zeme, Slnka a Marsu, no až pri štvrtom bude spolu s nimi v zákryte aj Mesiac. Vzhľadom na to, že sme zaokrúhľovali na celé dni, bude zákryt telies len približný.

Ján Dudič

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.