Úloha II.2 ... Lungernerseerský běh

5 bodů; průměr 2,67; řešilo 63 studentů

Každý rok se ve Švýcarsku pořádá Běh kolem jezera Lungernersee. Letos se běhu zúčastnily i Verča s Terkou. Na rozdíl od ostatních běžců si holky zvolily zajímavou techniku. Nejdříve začne Verča běžet s konstantním zrychlením a a Terka se zrychlením $2a$. V polovině času si zrychlení vymění – stejně dlouho bude pak Verča běžet se zrychlením $2a$, Terka se zrychlením a. Po akci se Verča chválila, že uběhla 5 km. S jakou uběhnutou vzdáleností se může pochválit Terka?
Velmi slušný bodový zisk dostanete i tehdy, když pouze rozhodnete, zda-li Terka uběhne více nebo méně než Verča. Odpověď ale musí být dobře odůvodněna.

Označme si polovinu času běhu jako t. Tento čas je stejný pro obě dívky i pro obě poloviny běhu. Obě dívky také startují se stejnou počáteční rychlostí $v_0 = 0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Během první poloviny běhu se rychlost Verči zvýší na rychlost v_v, kterou vypočítáme podle vztahu pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

$$v_\mathrm{v} = v_0 + at\,.$$

Po dosazení za v_0 dostáváme

$$v_\mathrm{v} = at\,.$$

Stejným způsobem vyjádříme Terčinu rychlost v_t po první polovině běhu

$$v_\mathrm{t} = v_0 + 2at = 2at\,.$$

Celková dráha, kterou každá z dívek uběhla, se rovná součtu drah, které uběhly v první a druhé polovině závodu. Verča tak uběhla dráhu $s_\mathrm{v} = s_{\mathrm{v}1} + s_{\mathrm{v}2}$. Dráhu v každé polovině běhu můžeme dopočítat podle vztahu pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t\,.$$

Musíme si ale uvědomit, že počátečné rychlosti holek jsou v druhé polovině rovné v_v a v_t. Dráha s_v, kterou uběhla Verča je tedy

$$s_\mathrm{v} = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + v_\mathrm{v} t + \frac{1}{2}2at^2 = \frac{1}{2}at^2 + at^2 + at^2 = 2{,}5at^2\,.$$

Stejným způsobem vyjádříme i dráhu s_t, kterou uběhla Terka

$$s_\mathrm{t} = v_0 t + \frac{1}{2}2at^2 + v_\mathrm{t} t + \frac{1}{2}at^2 = at^2 + 2at^2 + \frac{1}{2}at^2 = 3{,}5at^2\,.$$

Teď si všimneme, že platí

$$at^2 = \frac{s_\mathrm{v}}{2{,}5} = \frac{s_\mathrm{t}}{3{,}5}\,.$$

Dráhu s_v, kterou uběhla Verča, známe ze zadání, můžeme tedy dopočítat Terčinu dráhu s_t

$$s_\mathrm{t} = s_\mathrm{v} \cdot \frac{3{,}5}{2{,}5} = 5\,\mathrm{km} \cdot \frac{3{,}5}{2{,}5} = 7\,\mathrm{km}\,.$$

Terka se tedy může pochválit uběhnutou vzdáleností 7 km.

Poznámky k došlým riešením

Větší část z vás počítala správně se vztahy popisujícími rovnoměrně zrychlený pohyb. Jen pozor na to, že do druhé poloviny závodu vběhly obě slečny již s nějakou nenulovou rychlostí, kterou je třeba uvažovat, a druhou polovinu počítat s ní. Část z vás však zrychlení uvedené v zadání považovala za rychlost a počítala s rovnoměrným přímočarým pohybem slečen. Rychlost a zrychlení jsou opravdu dvě různé fyzikální veličiny, každá vyjadřuje něco jiného, takže si je nemůžeme libovolně zaměňovat. Někteří se také nechali zmást tím, že obě závodnice neběželi stejnou dráhu. Opravdu existují závody postavené jakoby naopak, kdy je cílem urazit co nejdelší vzdálenost za předem daný čas, stejný pro všechny závodníky (např. dvanáctiminutový běh, Den cesty,[1] ...).

Tereza Mašková
tereza@vyfuk.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.

[1] http://www.dencesty.cz/