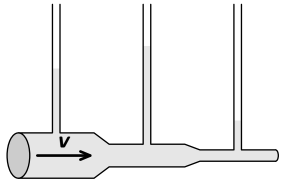
Úloha V.4 ... Potrubí

5 bodů; průměr 2,51; řešilo 41 studentů

V laboratoři máme nainstalované speciální potrubí složené ze tří úseků, přičemž průřez každého úseku je o polovinu menší než předcházející. V těchto úsecích máme nainstalované manometry, viz obrázek. Jsou to úzké tenké trubičky připojené kolmo na potrubí určené k měření tlaku v proudící kapalině. Výška, do které kapalina v manometru vystoupá, odpovídá hydrostatickému tlaku v potrubí. Vaší úlohou bude kvalitativně nakreslit a zdůvodnit, *jak budou vypadat výšky hladin ve třech manometrech našeho potrubí, když jím bude protékat ideální kapalina rychlostí* $\boldsymbol{v}$. *Předpokládejte, že manometry ústí do potrubí ve stejné výšce.*

Klíčová slova *Bernoulliho rovnice, rovnice kontinuity.*



Obr. 1: Náčrtek potrubí

Najskôr si musíme uvedomiť, že prietok Q je vo všetkých častiach potrubia rovnaký. Kedže v našom potrubí sa kvapalina nemôže strácať ani hromadiť, môžeme povedať, že hmotnostný prietok je vo všetkých miestach potrubia rovnaký. Naša kvapalina je ale nestlačiteľná[1] a teda hmotnostný prietok môžeme nahradiť za objemový prietok Q. Túto úvahu fyzikálne nazývame rovnicou kontinuity. V našom potrubí môžeme túto rovnicu napísať v tvare

$$Q_1 = Q_2 = Q_3\,,$$
$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v_3 S_3\,.$$

pričom Q_1, Q_2, Q_3 sú prietoky v jednotlivých častiach potrubia, v_1, v_2, v_3 sú rýchlosti prúdenia kvapaliny a S_1, S_2, S_3 sú prierezy potrubí. Z rovnice kontinuity vidíme, že koľkokrát sa zmenší prierez, toľkokrát sa zväčší rýchlosť. V najširšom potrubí bude kvapalina tiecť najpomalšie:

$$v_1 = \frac{1}{2} v_2 = \frac{1}{4} v_3\,. \tag{1}$$

Závislosť tlaku kvapaliny od rýchlosti prúdenia popisuje Bernoulliho rovnica. Označme p_1, p_2 a p_3 tlak kvapaliny a ϱ hustotu kvapaliny. Bernoulliho rovnica bude v tvare

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho {v_1}^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho {v_2}^2 = p_3 + \frac{1}{2}\varrho {v_3}^2\,. \tag{2}$$

V manometroch kvapalina neprúdi, a teda výška vodného stĺpca odráža tlak kvapaliny. Z hydrostatiky pre tlak vodného stĺpca poznáme vzťah

$$p = h\varrho g\,.$$

Po dosadení tohto vzťahu do (2) dostávame pre jednotlivé výšky h_1 až h_3 vzťah

$$h_1 \varrho g + \frac{1}{2}\varrho {v_1}^2 = h_2 \varrho g + \frac{1}{2}\varrho {v_2}^2 = h_3 \varrho g + \frac{1}{2}\varrho {v_3}^2\,.$$

Z tejto rovnice môžeme vykrátiť ϱ a dosadiť z rovnice (1) za rýchlosti v_1 a v_2. Táto dvojitá rovnosť znamená vlastne 2 rovnice,[2] ktoré môžeme riešiť oddelene.

$$h_1 g + \frac{1}{2}\left(v_1\right)^2 = h_2 g + \frac{1}{2}\left(2v_1\right)^2\,, \tag{3}$$

$$h_1 g + \frac{1}{2}\left(v_1\right)^2 = h_3 g + \frac{1}{2}\left(4v_1\right)^2\,. \tag{4}$$

[1] Nestlačiteľná kvapalina má vo všetkých miestach rovnakú hustotu.

[2] Aj keď z nej vieme vytvoriť rovnice tri, vždy bude jedna vyplývať z dvoch zvyšných.

Z rovnice (3) vyjadríme rozdiel výšok $h_1 - h_2$

$$h_1 - h_2 = \frac{3{v_1}^2}{2g}\,.$$

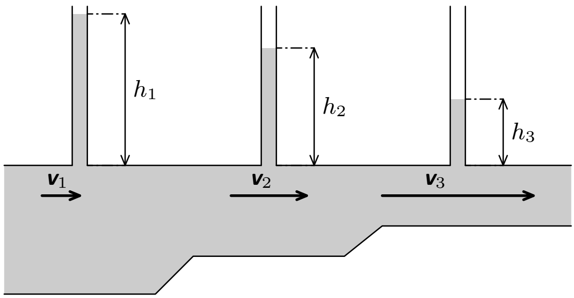
Vidíme, že výška hladiny v manometri v prvej časti je väčšia ako v druhej časti potrubia. Obdobným postupom porovnáme výšku v prvej a tretej časti potrubia pomocou rovnice (4). Opäť vyjadríme rozdiel výšok $h_1 - h_3$:

$$h_1 - h_3 = \frac{15{v_1}^2}{2g}\,.$$

Opäť vidíme, že $h_1 > h_3$. Po dosadení dostávame

$$h_1 = h_2 + \frac{3{v_1}^2}{2g} = h_3 + \frac{15{v_1}^2}{2g}\,,$$
$$h_2 = h_3 + \frac{6{v_1}^2}{g}\,.$$

Z obrázku vidieť, že výšky hladín v manometroch neklesajú rovnomerne. Niektorí z vás



Obr. 2: Výsledný obrázok hladín v manometroch

správne odhadli a vypočítali, že výšky klesajú s druhou mocninou prierezu, a teda opisujú časť paraboly.

Intuícia nám ale skôr hovorí, že tlak kvapaliny bude väčší práve tam, kde bude kvapalina pretekať tenším otvorom. Prekvapujúco sme dospeli k opačnému záveru. Môže sa dokonca stať, že tento tlak bude tak malý, že výška hladiny v manomteri by nám vyšla záporná. To by znamenalo, že prúdiaca kvapalina bude do seba cez manometer nasávať vzduch! Toto je dokonca jedno z využití Bernoulliho rovnice, tomuto javu sa hovorí aj *hydrodynamický paradox* a využíva sa pri maliarskych a lakovacích pištoliach.

Poznámky k došlým řešením

Mnohí z vás v riešení nevyužili Bernoulliho rovnicu aj napriek tomu, že sme vám v zadaní dali takúto pomôcku. Ak je rovnica výslovne spomenutá v zadaní, je dôležitá k správnemu vyriešeniu úlohy. Druhá častá chyba bol predpoklad, že nie prierezy, ale polomery sú v zadanom pomere.

Vo fyzike sa ale vždy prierezom myslí obsah plochy, ktorá vznikne rezom (najčastejšie kolmým) cez nejaký objekt.

Michal Červeňák
`miso@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.