Úloha V.1 ... Rovnice

3 body; průměr 0,91; řešilo 66 studentů

$$\square\left(\bigstar\cdot\blacksquare+\bigstar\cdot\square\cdot\checkmark^2\right)=\frac{\bigstar}{\maltese}$$

Čemu je rovno $\checkmark$? Jaké podmínky platí pro $\square$, $\bigstar$, $\blacksquare$, $\checkmark$ a $\maltese$? Uvažujte reálná čísla.

Když chceme hrozivě vypadající výraz jako v zadání upravit, musíme dbát na dvě základní pravidla:

- nikdy nedělíme nulou,
- nikdy nemůžeme mít pod odmocninou záporné číslo, jelikož odmocnina z něčeho záporného není v reálných číslech definována.

Postupujme tedy krok po kroku.

Aby mohla rovnost platit, tak musí být $\maltese\neq 0$. Tím získáváme první podmínku. Jako první krok můžeme zvolit ten, že vytkneme $\bigstar$ ze závorky na levé straně

$$\square\cdot\bigstar\left(\blacksquare+\square\cdot\checkmark^2\right)=\frac{\bigstar}{\maltese}\,.$$

Nyní se nabízí celou rovnici vydělit $\bigstar$, ale protože $\bigstar$ je neznámá, tak nevíme, jestli dělit můžeme. Proto musíme řešit oba případy.

Pokud $\bigstar=0$, pak dostáváme

$$\begin{aligned}\square\cdot 0\left(\blacksquare+\square\cdot\checkmark^2\right)&=\frac{0}{\maltese}\,,\\ 0&=0\,.\end{aligned}$$

Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení a navíc toto řešení nezávisí na $\checkmark$. Proto $\checkmark\in\mathbb{R}$. Takto jsme získali první řešení.

Pro $\bigstar\neq 0$ máme

$$\square\left(\blacksquare+\square\cdot\checkmark^2\right)=\frac{1}{\maltese}\,.$$

Nyní budeme dělit $\square$, a proto znova řešíme oba případy.

Pro $\square=0$ dostáváme

$$\begin{aligned}0\left(\blacksquare+0\cdot\checkmark^2\right)&=\frac{1}{\maltese}\,,\\ 0&=\frac{1}{\maltese}\,.\end{aligned}$$

Žádné řešení nedostáváme, neboť $\maltese\neq 0$. Pro $\square=0$ nemá rovnice řešení.

Pro $\square\neq 0$ máme

$$\begin{aligned}\blacksquare+\square\cdot\checkmark^2&=\frac{1}{\maltese\cdot\square}\,,\\ \square\cdot\checkmark^2&=\frac{1}{\maltese\cdot\square}-\blacksquare\,,\\ \checkmark^2&=\frac{1}{\maltese\cdot\square^2}-\frac{\blacksquare}{\square}\,.\end{aligned}$$

Zde můžeme znova dělit $\square$, protože už víme, že se nerovná 0.

Posledním krokem bude odmocnění obou stran rovnice. Umocňování není ekvivalentní úprava rovnic.[1] Proto si zapamatujte, že při odmocňování musíme použít úpravu

$$y^2 = x \quad \Rightarrow \quad |y| = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x}\,.$$

Dostaneme

$$|\checkmark| = \sqrt{\frac{1}{\maltese \cdot \square^2} - \frac{\blacksquare}{\square}}\,,$$
$$\checkmark = \pm\sqrt{\frac{1}{\maltese \cdot \square^2} - \frac{\blacksquare}{\square}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \maltese \cdot \square \cdot \blacksquare}{\maltese \cdot \square^2}}\,.$$

Nyní lze ještě určit podmínky pro výraz pod odmocninou, ale to již nebylo pro získání plného počtu bodů potřeba. Důležité bylo najít všechna tři řešení

$$\checkmark = \begin{cases} \checkmark \in \mathbb{R} & \text{pro} \quad \bigstar = 0\,, \maltese \neq 0\,, \\ +\sqrt{\frac{1}{\maltese \cdot \square^2} - \frac{\blacksquare}{\square}}\,, & \text{pro} \quad \bigstar \neq 0 \maltese \neq 0\,, \square \neq 0\,, \\ -\sqrt{\frac{1}{\maltese \cdot \square^2} - \frac{\blacksquare}{\square}}\,, & \text{pro} \quad \bigstar \neq 0 \maltese \neq 0\,, \square \neq 0\,. \end{cases}$$

Navíc, řešení neexistuje pokud $\bigstar = 0\,;\, \square \neq 0$ nebo $\maltese = 0$.

Petr Pecha
`xlfd@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] Všichni víme, že platí $2^2 = 4$, ale i $(-2)^2 = 4$. Pokud bychom neplatící rovnici $2 = -2$ umocnili, tak bychom dostali rovnost $4 = 4$. Ekvivalentní úpravy ale „správnost“ rovnic zachovávají.