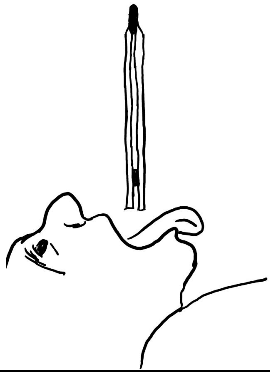


VÝFUK

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník II číslo 4/7

Úvodem

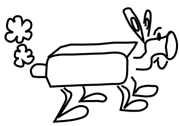
Milé řešitelky a milí řešitelé,

v této brožurce naleznete zadání již čtvrté série, vzorová řešení a výsledkové listiny série druhé. Studijní text a přidružené úlohy vás tentokrát uvedou do základního použití goniometrických funkcí.

Dále dáváme na vědomí, že **26.–28. dubna proběhne další (jarní) setkání řešitelů**. Opět se budete mít na co těšit, tak si vyhraďte místo v kalendáři. Podrobnější informace se dozvíte v příští brožurce.

Přejeme mnoho dobrých nápadů při řešení!

Organizátoři



Zadání IV. série

Termín uploadu: 5. března 2013 20.00
Termín odeslání: 4. března 2013

Úloha IV.1 ... Lázeň — 3 body

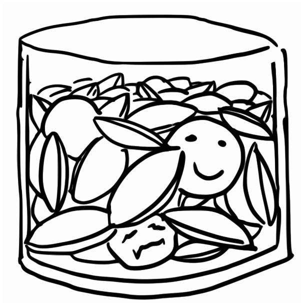
Franta z Rána se jde mýt. Má pokažený bojler, tak si vodu ohřeje na sporáku. Od minulého koupání ví, že když připravená voda ve vaně bude mít 47 °C, než se svlékne a ponoří se do ní, bude

Úloha IV.3 ... Střela II. 4 body

Minule jsme si ukazovali, jak za pomoci tajů kinematiky a rotujících kotoučů určit rychlost letícího broku ze vzduchovky. Nyní si ukážeme obdobný experiment, avšak upotřebíme polystyrenového kyvadla, které zavěsíme na tenké lanko ke stropu a do něhož následně vypálíme brok. Kyvadlo se po dopadu střely vychýlí z rovnovážné polohy horizontálně o 9 cm. Určete rychlost letící střely před nárazem do kyvadla. Hmotnost střely je 0,5 g, hmotnost kyvadla 625 g, délka lanka 3,8 m, naměřená výchylka 9 cm. **Pozor**, kulka po vniku do polystyrenu přemění většinu své energie na teplo!

Úloha IV.4 ... Rozbitý teploměr 4 body

Při posledním experimentu v laboratoři se matfyzákům podařilo náhodou rozbít velký rtuťový teploměr. V teploměru zůstala kapička rtuti dlouhá $h = 10\,\mathrm{cm}$, která v něm uzavírá vzduch. Když je směrem k zemi otočený rozbitý konec teploměru, vzduchová bublina je dlouhá $l_1 = 21{,}5\,\mathrm{cm}$. A když k zemi směruje zatavený konec teploměru, tíha rtuti vzduch v něm stlačí na délku $l_2 = 16{,}5\,\mathrm{cm}$. Z těchto údajů vypočtěte atmosferický tlak. Hustota rtuti je $\varrho = 13\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a tíhové zrychlení je $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Úloha IV.E ... Čočka 5 bodů

Vezměte si sklenici a nasypte do ní čočku. Jak můžete vidět, v čočce jsou vzduchové mezery. Změřte, jakou část objemu sklenice tvoří tyto mezery. Měření opakujte i pro krystalový cukr. Jako obvykle, pořádně popište, jak jste měření provedli, a nezapomeňte ho vícekrát opakovat.

Úloha IV.C ... Goniometrická 5 bodů

a) Na Higgsův boson (částice) působí dvě síly, jejichž vektory svírají úhel $\pi/6$. První síla je velká 5 N, druhá je velká 4 N a je téže orientace. Jaká je velikost výsledné síly?
   Pomůcka Nakreslete si obrázek.
b) V historické části textu jsme se dozvěděli, že Hipparchos odvodil vztah pro výpočet délky tětivy příslušné (tedy v závislosti na) danému středovému úhlu. Odvoďte jej také.
c) Odvoďte pomocí součtových vzorců vzorce pro $\sin(2\alpha)$ a $\cos(2\alpha)$.

Výfučtení: Goniometrické a cyklometrické funkce

Trocha historie

Bavíme-li se o goniometrických funkcích (a v souvislosti s nimi i o funkcích cyklometrických) musíme si uvědomit, že v průběhu času byly vnímány velmi odlišně. Věnujme tedy na začátku tohoto povídání pár řádků historii jejich vzniku a jak se postupně vyvíjely naše poznatky o nich.

V dnešní době definujeme rovinný úhel jako část roviny omezenou dvěma polopřímkami se společným počátkem. Ovšem zrod tohoto pojmu je spojen s dělením kruhu. Staří Babyloňané dělili kruh na 360 shodných částí (výsečí), které nazývali stupně, a dále pak každý stupeň dělili na dalších 60 částí nazývaných minuty. Toto dělení od nich převzali Řekové, a ačkoliv je šedesátková soustava zastaralá, přetrvala dodnes. Do této doby byl vrcholem práce s nimi poznatek o podobnosti trojúhelníků.

Další vývoj na poli trigonometrie byl podnícen astronomií. Starořecký astronom Hipparchos z Nikaie (180–125 př. n. l.) potřeboval pro své výpočty tabulky trigonometrických poměrů, které však do jeho doby neexistovaly. Vzal tedy v úvahu libovolný trojúhelník, jemuž opsal kružnici, čímž se každá strana stala tětivou této kružnice a jako takové jí příslušel středový úhel. K výpočtu velikostí různých prvků v trojúhelníku bylo tedy třeba stanovit délku tětivy příslušné danému středovému úhlu. Tento úkon (rozvinutý Klaudiem Ptolemaiem) byl hlavním objektem zájmu starověkých učenců.

Po rozpadu řecké společnosti se vývoj přesunul do Indie, kde byly zavedeny mnohem přesnější definice a rozšířeny znalosti o goniometrických funkcích. Indické vědomosti byly následně přeloženy a zdokonaleny v Arábii, kde už používali všech 6 goniometrických funkcí spolu s jejich velice přesnými a podrobnými tabulkami. Z této doby existuje označení sinu – latinsky *záliv, záhyb*. Označení vzniklo nesprávným překladem právě z děl arabských matematiků. Teprve až v 15. stol. se vývoj přesunul do Evropy. Až v této době se začalo měnit dosavadní pohlížení na goniometrii jakožto doplněk astronomie a dokonce až na konci 16. stol. byly tyto funkce poprvé definovány přes pravoúhlé trojúhelníky.

Poslední hlubokou změnu v chápání goniometrických funkcí umožnilo až dílo jednoho z nejslavnějších matematiků všech dob Leonarda Eulera v roce 1748. Teprve on přetvořil do té doby pouze numericky vyčíslované a tabulizované trigonometrické hodnoty ve funkce, které dokázal vyjádřit ve formě nekonečného součtu (chápejte tak, že čím více členů sečteme, tím přesnější dostaneme výsledek) tak, aby se dala hodnota funkce v bodě jednoduše vyčíslit. Díky tomuto zavedení už Eulera neomezovala nutnost spojovat hodnoty sinu, cosinu atd. s pravoúhlým trojúhelníkem a oprostil se tak od tisíciletého pohledu na tyto funkce jakožto na úsečky o určité délce. Od dob Eulera na ně pohlížíme jako na *čísla*.

S touto hlubokou změnou vnímání bychom měli na chvíli odbočit k dnešní terminologii. Česká matematická terminologie je totiž jedna z těch, ve kterých se ujal návrh významného matematika, fyzika a didaktika Felixe Kleina (1849–1925), který na počátku 20. století prosazoval její změnu. Ve většině ostatních jazyků narazíte pouze na termín trigonometrické funkce, či trigonometrie. Toto označení však poukazuje pouze na starší chápání významu těchto funkcí o němž je psáno výše – goniometrie pochází z řečtiny a znamená měření úhlů, trigon se pak překládá jako trojúhelník (dnes už nejsou goniometrické funkce omezovány pouze na trojúhelníky, případně úsečky).

Proto v češtině narážíme hlavně na goniometrické funkce a odlišujeme trigonometrii jako podobor goniometrie zabývající se původní aplikací goniometrických funkcí na geometrii trojúhelníků, zatímco v jiných jazycích přetrvalo jen jedno zavádějící označení. . .

Úhel

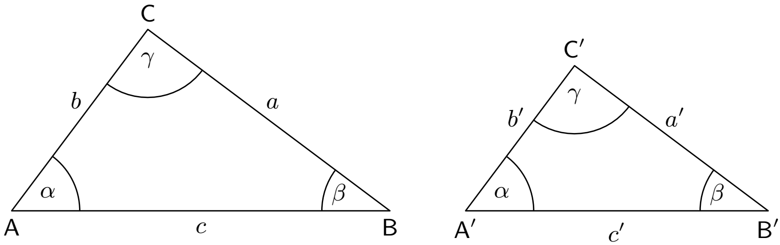
Definice úhlu popsána výše nám říká, že úhel je vlastně částí roviny. Musíme tedy rozlišovat mezi termíny úhel a velikost úhlu, s níž pracují goniometrické funkce. Proto se budeme bavit o tom, jak zapsat velikost úhlu.

Dnes se můžete setkat se dvěma různými jednotkami. Díky novověkému pohledu na goniometrické funkce a jejich užití ve vyšší matematice a ve fyzice je přirozenější úhly vyjadřovat v obloukové míře s jednotkou radián namísto stupňové. Jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Z této definice vyplývá, že plný úhel má 2π radiánů ($1\,\mathrm{rad} \doteq 57{,}3^\circ \doteq 57^\circ 17' 45''$). Převody mezi stupni a radiány hledejte v tabulce níže. Samotné slovo radián navrhl v roce 1871 Jameson Thomson.

Zpravidla se však z dobrých důvodů označení radián neuvádí a ztotožňuje se s jedničkou, takže například $2\pi\,\mathrm{rad} = 2\pi = 360^\circ$.

Zavedení trigonometrických funkcí

Definovat goniometrické funkce můžeme hned několika způsoby, my si však zatím ukážeme ten nejjednodušší – v pravoúhlém trojúhelníku.



Obr. 1: Podobné trojúhelníky

Na obrázku vidíme dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a A′B′C′ se shodným úhlem α. Jsou tedy *podobné* podle věty *uu*, z čehož plynou rovnosti následujících poměrů:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \qquad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

Vidíme, že tyto poměry jsou vždy kladné a u všech podobných pravoúhlých trojúhelníků shodné, resp. nezávisí na délkách jejich stran, ale jen a pouze na velikosti vnitřního úhlu α

k němuž tyto poměry vztahujeme. Těmto poměrům říkáme sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans[1] úhlu α

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Musíme si vždy uvědomit, ke kterému úhlu dané funkce vztahujeme. Například sinus úhlu β bude poměr stran b a c, ne a a b jako pro úhel α!

Vzhledem k tomu, že jsme zavedli pouze trigonomotrické funkce, v trojúhelníku, můžeme dosazovat úhly v rozmezí $(0°; 90°) \Leftrightarrow (0; \pi/2)$.

Tabulka základních úhlů

Tabulka 1: Důležité hodnoty goniometrických funkcí

α	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	neexistuje

K čemu je to vlastně dobré?

Ukážeme si nejjednodušší použití na následujícím příkladu: Určete délky všech stran pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, víte-li, že při běžném značení (proti vrcholu A je strana a a úhel při něm je α, stejným způsobem i pro ostatní vrcholy, strany a úhly) $\beta = 60\,°$ a $|AB| = 6$. Z definice sinu platí

$$\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|}\,,$$

$$|AC| = |AB|\sin\beta\,,$$

$$|AC| = 6\cdot\sin 60° = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,.$$

[1] V dnešní době se sekans a kosekans mimo anglosaský svět příliš nepoužívají, proto se těmito funkcemi nebudeme v našem textu dále zabývat.

Zbývající stranu můžeme dopočítat pomocí Pythagorovy věty, my však použijeme opět trigonometrii.

Protože

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ\,,$$

tak

$$\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ\,,$$

Pro sinus úhlu α platí:

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{|BC|}{|AB|}\,,\\ |BC| &= |AB|\sin\alpha\,,\\ |BC| &= 6\cdot\sin 30^\circ = 6\cdot\frac{1}{2} = 3\,.\end{aligned}$$

Trojúhelník ABC má tedy strany délky 6; 3 a $3\sqrt{3}$.

Rozšíření na obecný trojúhelník

Trigonometrické funkce se dají používat kromě pravoúhlého i v obecném trojúhelníku. Toto zobecnění s sebou přináší nutnost rozšíření definičního oboru i na tupé úhly (tedy na interval $[0;\pi]$).

Abychom mohli dopočítávat délky stran v libovolném trojúhelníku, budeme potřebovat znát nové trigonometrické identity, jimiž jsou sinová a kosinová věta. Při běžném značení platí:

- sinová věta

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,,\qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,,\qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,,$$

- kosinová věta

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.\end{aligned}$$

Všimněme si, že jestliže bude trojúhleník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, přechází třetí rovnice do tvaru Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ (protože $\cos(\pi/2) = 0$).

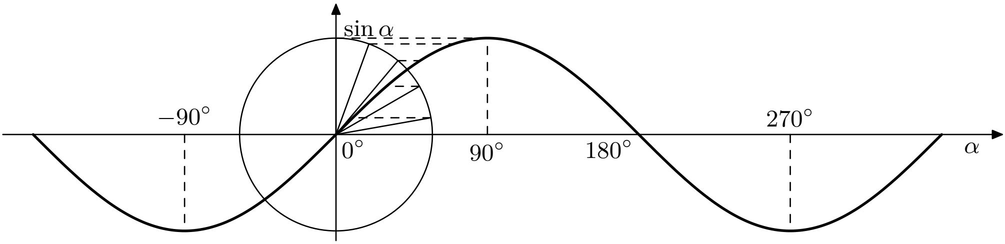
Zavedení goniometrických funkcí

Jestliže definujeme goniometrické funkce pomocí tzv. jednotkové kružnice[2], můžeme dále rozšířit definiční obor těchto funkcí[3]. Takto definované funkce jedné proměnné nacházejí široké uplatnění napříč matematikou, fyzikou a jinými obory. Na dalších řádcích popíšeme některé vlastnosti jednotlivých funkcí na rozšířeném definičním oboru:

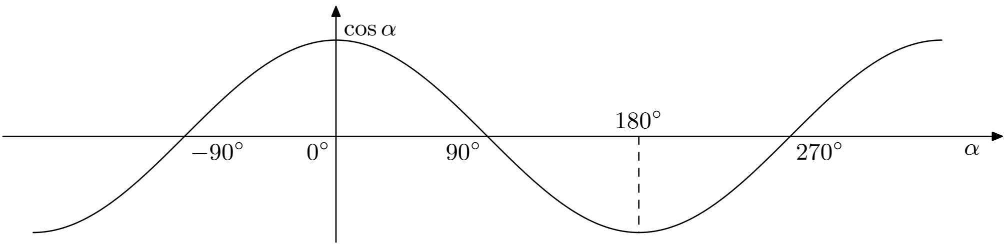
[2] Pro zájemce `http://cs.wikipedia.org/wiki/Jednotková_kružnice`

[3] Definiční obor je množina všech čísel, které můžeme do funkce dosadit.

Sinus a kosinus tyto dvě funkce mají velmi podobné vlastnosti, do obou můžeme dosadit jakékoli číslo, obě vám na výstupu dají číslo od -1 do 1. Obě jsou to periodické funkce s periodou 2π. Pokud tedy do funkcí dosadíme úhel o libolný násobek 2π větší, dostaneme to samé číslo. Platí tedy pro ně vztahy $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ a $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, k je libovolné celé číslo. Sinus je lichá funkce, symbolicky tedy $\sin(-x) = -\sin(x)$, zatímco kosinus je funkce sudá, tedy $\cos(-x) = \cos(x)$.



Obr. 2: Sinusoida



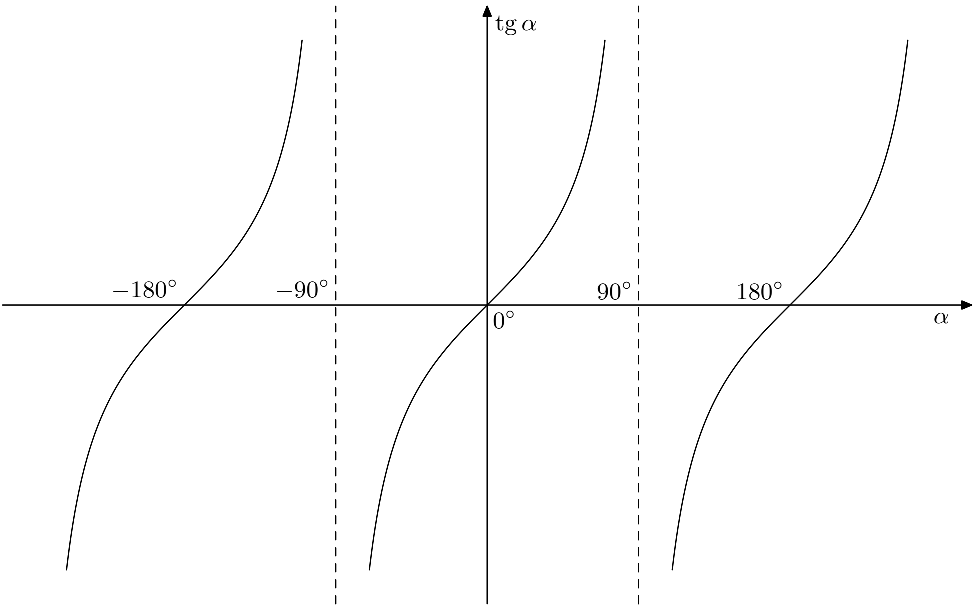
Obr. 3: Kosinusoida

Tangens je definovaný jako podíl sinu a kosinu. V matematice nemůžeme dělit nulou, proto tangens existuje jenom v bodech x, pro které $\cos(x) \neq 0$. Nemůžeme tedy dosazovat úhly $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ atd. Funkce na výstupu dává všechna reálná čísla, tedy i větší jako 1 nebo menší jako -1. Jedná se o lichou periodickou funkci (perioda je π): $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{tg}(x + k\pi) = {} = \mathrm{tg}(x)$.

Kotangens je definovaný jako podíl kosinu a sinu, proto musí platit $\sin(x) \neq 0$. Můžeme dosazovat tedy cokoliv s výjimmkou všech násobků úhlu π. Stejně jako tangens nám dá jakékoliv číslo a je to také lichá a periodická funkce: $\mathrm{cotg}(-x) = -\mathrm{cotg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x + k\pi) = \mathrm{cotg}(x)$.

Cyklometrické funkce

Dosud jsme řešili pouze problém hledání funkční hodnoty pro daný úhel, například $\sin(30°) = ?$. Co když ale máme danou pouze onu funkční hodnotu a máme zjistit, kterému úhlu náleží – kupříkladu $\sin(x) = 0{,}5$; $x = ?$. K tomuto účelu slouží právě cyklometrické funkce, které jsou jen jiným označením pro inverzní funkce ke goniometrickým funkcím (tzn., že do nich „hodíme“



Obr. 4: Tangenta

jinak funkční hodnotu a „vypadne“ z ní hodnota úhlu). Slovní označení jsou arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg). Na kalkulačkách se z důvodu úspory místa setkáme spíše s označením $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ apod., nepleťte si toto označení s mocninami, nejedná se o převrácené hodnoty goniometrických funkcí.

Jedné hodnotě sinu a kosinu připadá nekonečně mnoho úhlů, přičemž úhel, který patří do intervalu $[0°; 360°] = [0; 2\pi]$ nazýváme úhlem základním.

Základní goniometrické vzorce

Při různých výpočtech se jistě setkáte s nutností zjednodušit nějaký hrůzostrašně vypadající výraz. K tomu vám jistě přijdou vhod následující identity.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,,$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Pokud vás budou zajímat další vztahy, třeba pro tangens, neváhejte a najděte si je.

Fyzikální aplikace

Goniometrické vzorce nachází uplatnění, jak již bylo řečeno, napříč celou matematikou, fyzikou a technickými obory. Při řešení tohoto semináře se jistě setkáte s těmito funkcemi při skládání sil (obecně při práci s vektory), zmiňme kupříkladu rozklad sil na nakloněné rovině atd. Goniometrické funkce se používají při popisu kmitavého pohybu, elektromegnetického vlnění... Jejich použití je nesmírně široké.

Řešení II. série

Vzorové řešení experimentální úlohy se co nevidět objeví na našem webu a bude vytištěno v příští brožurce. Za prodlení se omlouváme.

Úloha II.1 ... Von Dresden nach Wien

3 body; průměr 2,68; řešilo 87 studentů

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba $d = 370\,\mathrm{km}$ vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

Nápověda *Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako*

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}\,,$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}\,,$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

Vzdálenost měst s_p po povrchu lze vyjádřit pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku

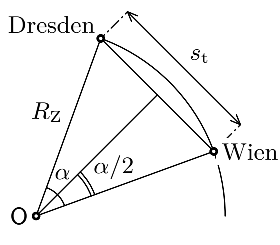
$$s_\mathrm{p} = R_\mathrm{z}\alpha\,,$$

kde R_z je poloměr Země a α je úhel, který vytínají spojnice měst se středem Země. Z tohoto vztahu můžeme snadno vyjádřit

$$\alpha = \frac{s_\mathrm{p}}{R_\mathrm{z}}\,.$$

Vzdálenost měst s_t při cestě hypotetickým tunelem lze za znalosti úhlu α vyjádřit jako (viz obrázek 5)

$$s_\mathrm{t} = 2R_\mathrm{z}\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{1}$$



Obr. 5: Tunel z Drážďan do Vídně

Pro zjednodušení můžeme pro malé úhly aproximovat sinus prvními dvěma členy Taylorovy řady (v. nápovědu), tedy

$$\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}\,.$$

Po dosazení této aproximace do vztahu (1) vychází

$$s_\mathrm{t} \approx 2R_\mathrm{z}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^3}{48}\right) = R_\mathrm{z}\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{24}\right) = R_\mathrm{z}\left(\frac{s_\mathrm{p}}{R_\mathrm{z}}-\frac{s_\mathrm{p}^3}{24R_\mathrm{z}^3}\right) = s_\mathrm{p}-\frac{s_\mathrm{p}^3}{24R_\mathrm{z}^2}\,,$$

a tedy

$$\Delta s = s_\mathrm{p}-s_\mathrm{t} = \frac{s_\mathrm{p}^3}{24R_\mathrm{z}^2}\,.$$

Po dosazení $s_\mathrm{p} = 370\,\mathrm{km}$ a $R_\mathrm{z} = 6378\,\mathrm{km}$ vychází $\Delta s = 52\,\mathrm{m}$.

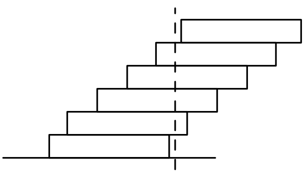
Odhadnout dobu cesty mezi těmito dvěma městy je záludné, neboť je potřeba znát průměrnou rychlost jízdy. Co ale můžeme snadno vyjádřit, je relativní změna doby jízdy při jízdě tunelem za předpokladu, že průměrná rychlost jízdy na povrchu je stejná jako průměrná rychlost jízdy tunelem

$$\frac{\Delta t}{t_\mathrm{p}} = \frac{\frac{\Delta s}{v}}{\frac{s_\mathrm{p}}{v}} = \frac{\Delta s}{s_\mathrm{p}}\,.$$

Po dosazení vychází $\Delta t/t_\mathrm{p} = 0{,}014\,\%$, což je naprosto zanedbatelná hodnota. Pokud by průměrná rychlost činila např. $v = 100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, pak by rozdíl doby jízdy při cestě po povrchu a tunelem činil zhruba $\Delta t = 1{,}9\,\mathrm{s}$, což při celkové době jízdy 3 hodiny 42 minut nehraje opravdu žádnou roli.

Nakonec můžeme srovnat vzdálenost měst při cestě tunelem se vzdáleností měst při cestě po silnici. Podle webu `http://mapy.cz` je nejkratší cesta z Drážďan do Vídně dlouhá 438 km. Zjišťujeme tedy, že „klikatost“ silnice má na délku cesty mnohem větší vliv než to, že je Země kulatá.

Zdeněk Jakub
`zdenekjakub@fykos.cz`



Úloha II.2 ... Zítra se začnu učit

3 body; průměr 0,79; řešilo 67 studentů

Během minulého zkouškového období shledal matfyzák Pepa, že už na stole nemá dostatek místa, a tak se rozhodl, že si pracovní místo přeorganizuje. Jako nejvhodnější se mu zdálo přesunout knihu Diferenciální počet I mimo stůl, ale tak, aby tato kniha byla stále v dosahu.

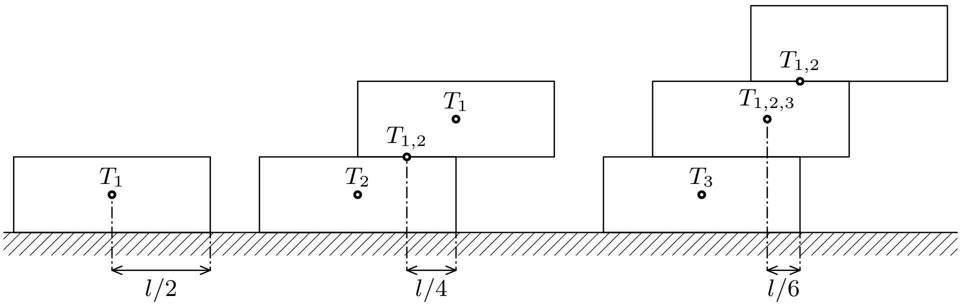
Ovšem ani nejbližší skříňka nebyla dostatečně blízko, aby na knihu dosáhl. Sesbíral proto po pokoji všechny nepotřebné učebnice a vyskládal z nich na skříňku sloupec knih tak, že každou další knihu vysunul o kousek blíže stolu než tu předchozí, ale zároveň ne moc, aby se sloup knih nezřítil. Knihy poskládal tak, že pod vrchním Diferenciálním počtem I nebyl ani kousek nejspodnější knihy. Na takto odsunutou knihu už Pepa v pohodě dosáhl. Kolik nejméně knih je potřeba, aby se dala taková věž z knih postavit, pokud mají všechny použité knihy stejné rozměry (a hmotnosti)?

Najdôležitejšia vec pri riešení príkladu je správne si prečítať zadanie. Písali sme, že Pepa knižky ukladá tak, aby *sa nezrútili*. To by nám mohlo napovedať, že nejaké riešenie existuje a snažiť sa ho nájsť.

Veľa z vás totiž prehlásilo, že veža s *rovnomerne* vysunutými knižkami spadne. To je síce správne, ale rovnomerné vysunutie nie je jediná možnosť!

Musíme prísť na to, ako veľmi môžeme jednotlivé knihy vysúvať[4]. Hneď si všimneme, že vrchná kniha musí mať svoje ťažisko položené na knihe pod ňou. Aby bola splnená táto podmienka, tak vrchná kniha môže byť vysunutá maximálne o polovicu svojej šírky[5]. Toto však musí platiť aj pre vrchné 2 knihy – ich *spoločné ťažisko* musí ležať na knihe pod nimi. Podobná podmienka platí aj pre 3, 4, 5 kníh a tak ďalej, až kým sa postupne neprebojujeme k spodku veže. Pri ukladaní takýmto spôsobom bude ľubovoľná časť veže stabilná, a teda stabilná bude aj celá veža.

Poďme vypočítať jednotlivé vysunutia. Knižky začneme ukladať *pod seba* od najvrchnejšej a budeme ich vysúvať podľa obrázka. Ako sme povedali, prvú vysunieme o $l/2$ jej šírky. Spočítajme spoločné ťažisko prvej a druhej knihy: ak predpokladáme, že všetky knihy sú rovnaké, tak ťažisko bude v strede – teda vo vzdialenosti $l/4$ od pravého okraja druhej knihy:



Obr. 6: Náčrtok stavania vrchných troch kníh

Tretiu knižku podložíme tak, aby ťažisko $\mathsf{T}_{1,2}$ bolo presne nad pravým okrajom tretej knihy. Znova spočítajme ťažisko týchto 3 kníh. Je logické, že bude ležať niekde medzi ťažiskom 3. knihy T_3 a spoločným ťažiskom prvých 2 kníh $\mathsf{T}_{1,2}$. Keďže $\mathsf{T}_{1,2}$ je nad okrajom 3. knihy, vzdialenosť $\mathsf{T}_{1,2}\mathsf{T}_3$ bude $l/2$. Ak si uvedomíme, že bod $\mathsf{T}_{1,2}$ zastupuje 2 knižky a T_3 jednu, je rozumné očakávať, že ťažisko všetkých 3 kníh $\mathsf{T}_{1,2,3}$ bude dvakrát bližšie k $\mathsf{T}_{1,2}$. Vzdialenosť $l/2$ si teda rozdelíme na tretiny a hneď vidíme, že spoločné ťažisko 3 kníh sa nachádza vo vzidalenosti $l/6$ od pravého okraja tretej knihy.

Ďalej pokračujeme rovnako. Podložíme štvrtú knihu a urobíme celý proces dookola. Znova budeme deliť vzdialenosť $l/2$ medzi ťažiskom prvých 3 kníh $\mathsf{T}_{1,2,3}$ a ťažiskom štvrtej knihy, tentokrát ale na 4 časti. Podobným postupom dospejeme, že spoločné ťažisko 4 kníh je vzdialené o $l/8$. Všimnime si, že sme postupne dostali výsledky $l/2$, $l/4$, $l/6$ a $l/8$. Nemusíme viac počítať: vidíme, že ďalšiu knihu môžeme vysunúť o $l/10$, potom o $l/12$ atď.

Ľahko overíme, že $l/2 + l/4 + l/6 + l/8 = 25l/24$, čo znamená, že Pepovi stačí 5 knižiek aby dosiahol svoj sen.[6]

Patrik Švančara
`patrik@fykos.cz`

[4]Keďže chceme nájsť najmenší počet kníh.
[5]Vtedy bude jej ťažisko položené presne na okraji knihy pod ňou.
[6]Kto nevidí, prečo 5 kníh, keď spočítavame iba 4 zlomky, nech si to nakreslí :-).

Úloha II.3 ... Raketa Vítěz

3 body; průměr 2,03; řešilo 71 studentů

Předpokladáme, že raketa Vítěz letí k Zemi po přímce, která spojuje středy Země a Měsíce. Zjistěte, v jaké vzdálenosti od povrchu Země se nachází bod, kde gravitační síla Země působící na raketu bude vyrovnána gravitační silou Měsíce.

Hmotnost Země je $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg *a hmotnost Měsíce je* $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg.

Raketa Vítěz se pohybuje jak v radiálním gravitačním poli Země, tak Měsíce. V radiálním poli platí Newtonův gravitační zákon: „Dva hmotné body na sebe působí vzájemně gravitačními silami, které jsou stejně velké a opačně orientované. Jejich velikost je přímo úměrná součinu hmotností těchto bodů a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti.“

Aby výsledná síla působící na raketu byla nulová, musí platit

$$F_{\mathrm{gZ}} = F_{\mathrm{gM}} \,,$$

$$\kappa \frac{M_{\mathrm{Z}} m}{r_1^2} = \kappa \frac{M_{\mathrm{M}} m}{r_2^2} \,,$$

kde M_{Z} je hmotnost Země, M_{M} je hmotnost Měsíce, m je hmotnost rakety, κ je gravitační konstanta a r_1, r_2 jsou vzdálenosti rakety od středu Země resp. Měsíce.

$$\frac{M_{\mathrm{Z}}}{r_1^2} = \frac{M_{\mathrm{M}}}{r_2^2} \,,$$

$$\frac{\sqrt{M_{\mathrm{Z}}}}{r_1} = \frac{\sqrt{M_{\mathrm{M}}}}{r_2} \,.$$

Za r_2 můžeme dosadit $r - r_1$, kde r je střední vzdálenost středů Země a Měsíce ($r = 384\,403\,\mathrm{km}$)

$$\frac{\sqrt{M_{\mathrm{Z}}}}{r_1} = \frac{\sqrt{M_{\mathrm{M}}}}{r - r_1} \,,$$

$$r_1 = \frac{r\sqrt{M_{\mathrm{Z}}}}{\sqrt{M_{\mathrm{M}}} + \sqrt{M_{\mathrm{Z}}}} \,.$$

Po číselném dosazení dostaneme přibližně $r_1 = 346\,011\,\mathrm{km}$ a když od této hodnoty odečteme zemský poloměr ($R_{\mathrm{Z}} = 6\,378\,\mathrm{km}$) dostamene hledanou vzdálenost rakety od zemského povrchu, která je $339\,633\,\mathrm{km}$.

Poznámky k došlým řešením

1. Úlohu šlo velmi podobně řešit přes intenzitu radiálního gravitačního pole.
2. Vzdálenost Země a Měsíce není konstantní a pohybuje se od 356 410 km, kdy je Měsíc Zemi nejblíže (v perigeu), po 406 697 km, kdy je Měsíc nejdále (v apogeu). Běžně se používá střední vzdálenost, která je oněch 384 403 km.
3. Pozor na rozdíly mezi tíhovou a gravitační silou! Nemalá část z vás si je stále plete.

Lukáš Fusek
`lukasf@fykos.cz`

Úloha II.4 ... Kontrola rychlosti

5 bodů; průměr 0,96; řešilo 45 studentů

Aby pozorovatel zjistil rychlost rakety Vítěz, střelil do rakety světelným paprskem o vlnové délce 510 nm. *K pozorovateli se vrátil světelný paprsek o vlnové délce o* 0,21 nm *kratší než původní vlnová délka.*

Zjistěte rychlost rakety, víte-li, že rychlost světla je $3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Nejprve si popíšeme situaci. Začátek vlny narazí do lodi, loď pokračuje ve své dráze a pak do ní narazí konec vlny. Časový rozdíl mezi nárazy si označíme t. Zároveň se začátek vlny po tento čas t již vzdaloval zpět od lodi. Odražená vlnová délka λ_2 je rovna součtu vzdálenosti s_1, kterou musel urazit konec vlny od nárazu začátku vlny po svůj náraz, a vzdálenosti s_2, kterou urazil začátek vlny od odrazu zpět po čas t. Za kladný směr rychlosti lodi v_R bereme pohyb lodi směrem od pozorovatele:

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\lambda_1}{c - v_\mathrm{R}}\,, \\
\lambda_2 &= s_1 + s_2\,, \\
s_1 &= tc\,, \\
s_2 &= tv_\mathrm{R}\,, \\
\lambda_2 &= tc + tv_\mathrm{R}\,, \\
\lambda_2 &= \frac{\lambda_1(v_\mathrm{R} + c)}{c - v_\mathrm{R}}\,, \\
v_\mathrm{R} &= \frac{c(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 + \lambda_1}\,.
\end{aligned}
$$

Po dosazení zadaných hodnot nám vyjde

$$
\begin{aligned}
v_\mathrm{R} &= \frac{3 \cdot 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot (-0{,}21 \,\mathrm{nm})}{2 \cdot 510 \,\mathrm{nm} - 0{,}21 \,\mathrm{nm}}\,, \\
v_\mathrm{R} &\doteq -62\,000 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Jelikož nám vyšla rychlost rakety záporná, raketa se pohybuje směrem k pozorovateli.

Raketa Vítěz letí směrem k pozorovateli rychlostí velkou $|v_\mathrm{R}| = 62\,000 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Komentář k došlým řešením

Mnoho z vás si našlo vzoreček pro změnu vlnové délky při pohybujícím se zdroji. Tato situace se od naší liší tím, že raketa nevysílá, ale odráží signál. Takže vlna letí nejen od rakety k pozorovateli, ale nejdříve i od pozorovatele k raketě.

Alžběta Nečadová
`bjetka@fykos.cz`

Úloha II.C ... Seriálová

4 body; průměr 2,62; řešilo 42 studentů

a) *Vypočtěte vektory* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *sečtením a odečtením vektorů* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *a určete velikost úhlu, který svírají vektory* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

b) *Ke každému vektoru z předchozí úlohy najděte kolmý vektor. Jaký by byl vektor kolmý zároveň k oběma vektorům* $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

c) *Určete obsah trojúhelníku, jehož dvě strany jsou vektory* $\boldsymbol{e}$ *a* $\boldsymbol{f}$.

a) Vektor $\boldsymbol{a}$ vypočteme sečtením jednotlivých složek zadaných vektorů. Vektor $\boldsymbol{b}$ naopak jejich odečtením. V jakém pořadí se rozhodneme vektory odčítat nám ovlivní pouze orientaci výsledného vektoru, ale jeho velikost a směr budou stejné.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 5 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 5 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Úhel svíraný vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ lze snadno zjistit ze vzorečku uvedeného v textu seriálu.

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}} = \frac{3 \cdot (-7) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2}} = -0{,}8\,,$$

$$\varphi = 143{,}13^\circ\,.$$

b) Kolmé vektory svírají úhel 90° a jejich skalární součin se tedy rovná

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos 90^\circ = 0\,.$$

Pro zjištění kolmých vektorů dosadíme do vztahu pro skalární součin jeden z vektorů. Kolmý vektor $\boldsymbol{g}$ k vektoru $\boldsymbol{u}$ určíme následujícím způsobem

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} = u_1 \cdot g_1 + u_2 \cdot g_2 = -2g_1 + 1g_2 = 0\,.$$

Jednu ze složek hledaného vektoru $\boldsymbol{g}$ můžeme zvolit libovolně a druhou dopočteme ze vztahu výše. Potom může vektor $\boldsymbol{g}$ vypadat například

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Další kolmé vektory $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ k vektorům $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ se určí obdobně. Například můžeme získat následující vektory

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Otočením původního vektoru o 90° kolem počátku získáme také kolmý vektor. Pokud si to načrtneme do kartézské soustavy souřadnic, můžeme si všimnout, že výsledný kolmý vektor se liší od původního pouze prohozením souřadnic vektoru a změnou znaménka u jedné souřadnice. Např. nalezené vektory $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{j}$ toto splňují. Jsou to tedy vektory otočené o 90° a mají stejnou délku jako původní vektory.

Kolmý vektor k vektorům $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$ vytvoříme pomocí vektorového součinu zadaných vektorů. Takový vektor bude kolmý na rovinu, ve které leží vektory $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$, a tedy i k těmto vektorům.

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 6 \\ 15 - 28 \\ -8 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ -13 \end{pmatrix} .$$

c) Velikost vektorového součinu daných vektorů $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$ je obsah rovnoběžníku, jehož strany tvoří tyto vektory. Polovina takového rovnoběžníku je hledaný obsah trojúhelníku.

$$|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{13^2 + (-13)^2 + (-13)^2} = \sqrt{3 \cdot 13^2} = \sqrt{3} \cdot 13 \doteq 22{,}52 ,$$

$$S = \frac{|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}|}{2} = \frac{13}{2}\sqrt{3} \doteq 11, 26 .$$

Chtěli bychom poděkovat Matěji Mezerovi, který nás upozornil na následující chybu v textu seriálu. Namísto vzorce

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos \varphi$$

je správně

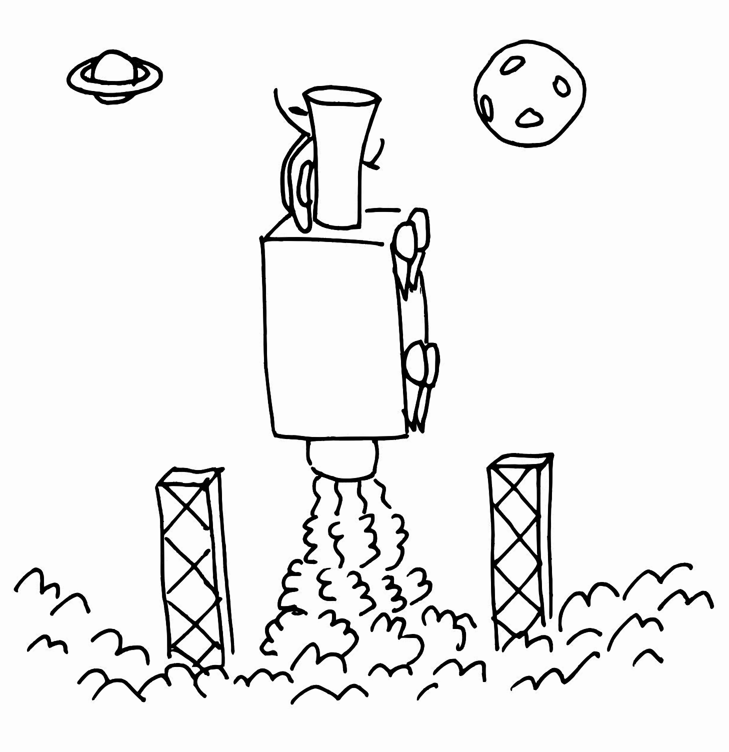
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin \varphi .$$

Eliška Pilátová
eliska@fykos.cz

Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	3	5	4	4	**22**	*100*	**48**
1.	*Miroslav Šafář*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	3	0	2	0	1	4	**10**	*54*	**26**
2.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**13**
3.–4.	*Petr Kolář*		–	–	–	–	–	–	–	*78*	**7**
3.–4.	*Stanislava Košáková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	3	–	–	–	–	–	**3**	*88*	**7**
5.–7.	*Pavla Mašková*	2. ZŠ JAK Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	*83*	**5**
5.–7.	*Nora Prokešová*	První české G, Karlovy Vary	3	–	–	–	–	–	**3**	*100*	**5**
5.–7.	*Marta Stehlíková*	Masarykova ZŠ, Ždánice	–	–	–	–	–	–	–	*83*	**5**
8.–9.	*Vít Kučera*	1. ZŠ TGM Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	*44*	**4**
8.–9.	*Václav Nevyhoštěný*	ZŠ Letovice	–	–	–	–	–	–	–	*67*	**4**
10.	*Martin Burget*		–	–	–	–	–	–	–	*33*	**3**
11.–12.	*Nikola Müllerová*	ZŠ Nová Paka, Husitská	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**2**
11.–12.	*Pavel Svoboda*	ZŠ Jílovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**2**
13.–15.	*Tereza Březinová*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**1**
13.–15.	*Tereza Burianová*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	*14*	**1**
13.–15.	*Kateřina Hledíková*	ZŠ TGM, Bojkovice	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**1**
16.–18.	*Ondřej Benáček*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	*0*	**0**
16.–18.	*Tomáš Kudera*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	*0*	**0**
16.–18.	*Romana Nehybová*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	*0*	**0**



Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	3	5	4	4	**22**	*100*	**48**
1.	*Erik Kočandrle*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	3	3	1	4	4	**18**	*81*	**39**
2.	*Markéta Kaiserová*	ZŠ Schulz. sady, Dvůr Králové	3	1	3	3	4	4	**18**	*67*	**32**
3.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	3	0	3	–	–	4	**10**	*73*	**22**
4.	*Veronika Přikrylová*	G J. Škody, Přerov	3	2	0	2	2	–	**9**	*48*	**21**
5.–9.	*Ludmila Hlávková*	ZŠ Šlapanice	3	1	–	–	–	3	**7**	*53*	**19**
5.–9.	*Ivana Horáčková*	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	*73*	**19**
5.–9.	*Eleonora Krůtová*	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	–	4	**4**	*83*	**19**
5.–9.	*Kateřina Pšeničková*	ZŠ, Lupáčova, Praha	3	–	3	–	–	–	**6**	*59*	**19**
5.–9.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	0	2	2	0	2	–	**6**	*50*	**19**
10.–12.	*Lucie Hercíková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	–	0	–	–	2	2	**4**	*46*	**17**
10.–12.	*Martin Křemek*	G, Hranice	–	–	–	–	–	–	–	*65*	**17**
10.–12.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	3	–	3	–	–	1	**7**	*74*	**17**
13.–14.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	3	–	–	–	–	–	**3**	*55*	**16**
13.–14.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	3	2	1	–	–	4	**10**	*84*	**16**
15.	*Jan Pokorný*	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	*88*	**14**
16.–17.	*Tadeáš Erban*	ZŠ a MŠ Petřiny – jih, Praha	3	1	2	–	1	–	**7**	*45*	**13**
16.–17.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**13**
18.	*Klára Adámková*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	2	1	**3**	*71*	**12**
19.–20.	*Ondřej Charvát*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	3	2	**5**	*71*	**10**
19.–20.	*Jan Procházka*	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	*77*	**10**
21.–25.	*David Hudák*	ZŠ a MŠ Ořechov	–	0	–	–	2	–	**2**	*27*	**9**
21.–25.	*Martina Ivanova*	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	–	–	–	–	–	–	*56*	**9**
21.–25.	*Michael Mallý*	ZŠ JIH, Mariánské Lázně	–	–	–	–	–	–	–	*53*	**9**
21.–25.	*Martin Motejlek*	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	3	–	–	–	**3**	*100*	**9**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	3	5	4	4	**22**	*100*	**48**
1.	*Matěj Mezera*	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská 3240	3	3	3	4	3	4	**20**	*94*	**45**
2.–3.	*Jáchym Bártík*	G Havlíčkův Brod	3	1	3	1	2	4	**14**	*81*	**39**
2.–3.	*Martin Štyks*	G, Lovosice	3	3	3	1	3	4	**17**	*81*	**39**
4.	*Jaroslav Janoš*	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	1	3	1	3	4	**15**	*75*	**36**
5.	*Klára Ševčíková*	G Uherské Hradiště	3	1	4	1	1	3	**13**	*73*	**35**
6.	*Matěj Coufal*	G Havlíčkův Brod	3	0	3	–	3	2	**11**	*77*	**33**
7.–9.	*Adam Poloček*	ZŠ Havlíčkova, Český Těšín	3	2	3	2	2	2	**14**	*60*	**29**
7.–9.	*David Surma*	G J. Wolkera, Prostějov	3	1	3	2	1	3	**13**	*60*	**29**
7.–9.	*Miroslav Vejvoda*	G, Nový Bydžov	2	3	3	1	1	4	**14**	*66*	**29**
10.	*Simona Gabrielová*	G, Jírovcova, České Budějovice	3	0	1	1	3	3	**11**	*54*	**26**
11.	*Jan Stulhofer*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	3	0	0	–	2	3	**8**	*58*	**25**
12.–13.	*Lucie Hronová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	3	0	2	1	–	4	**10**	*55*	**24**
12.–13.	*Kateřina Stodolová*	ZŠ Pardubice – Polabiny	3	0	3	1	1	2	**10**	*50*	**24**
14.	*Zuzana Matůšová*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	0	3	0	–	1	**4**	*54*	**22**
15.	*Markéta Ospálková*	ZŠ Šumvald	3	–	–	–	1	1	**5**	*68*	**21**
16.	*Jan Gavlas*	Svobodná chebská škola	3	0	1	0	2	–	**6**	*41*	**18**
17.–20.	*Jan Bureš*	Svobodná chebská škola	3	0	1	1	2	–	**7**	*46*	**17**
17.–20.	*Honza Dang*	Svobodná chebská škola	3	0	3	1	–	–	**7**	*52*	**17**
17.–20.	*Aneta K. Lesná*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	3	–	1	–	**4**	*63*	**17**
17.–20.	*Pavla Mikulíková*	G J. Škody, Přerov	3	–	–	–	–	–	**3**	*77*	**17**
21.–22.	*Jaromír Mielec*	G Volgogradská, Ostrava	–	–	2	1	–	4	**7**	*64*	**16**
21.–22.	*Matěj Šnajdr*	Svobodná chebská škola	3	0	1	1	1	–	**6**	*42*	**16**
23.	*Jakub Vrba*	G, Svitavy	–	–	3	–	–	–	**3**	*48*	**14**
24.–28.	*Martina Fusková*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	3	–	**3**	*57*	**13**
24.–28.	*Jan Marek*	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Železnice	–	–	1	–	–	–	**1**	*57*	**13**
24.–28.	*Raja Marek*	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	**–**	*59*	**13**
24.–28.	*Klára Slováčková*	G Christiana Dopplera, Praha	3	–	2	–	–	–	**5**	*87*	**13**
24.–28.	*Klára Svobodová*	Křesťanská ZŠ Nativity, Děčín	3	1	3	–	–	–	**7**	*52*	**13**
29.	*Oldřich Kupka*	ZŠ Ivanovice na Hané	0	–	0	0	2	1	**3**	*31*	**12**
30.–35.	*Anna Dědová*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	**–**	*58*	**11**
30.–35.	*Aleksej Gaj*	G Christiana Dopplera, Praha	3	0	4	1	–	–	**8**	*41*	**11**
30.–35.	*Jan Holásek*	G, Ústí nad Orlicí	–	–	–	–	–	–	**–**	*85*	**11**
30.–35.	*Jakub Matějik*	ZŠ a MŠ Bílovice	–	0	–	1	1	1	**3**	*31*	**11**
30.–35.	*Michal Smrčka*	G, Lesní čtvrť, Zlín	3	–	3	1	–	–	**7**	*73*	**11**
30.–35.	*David Vu Trung*	První české G, Karlovy Vary	3	0	3	0	1	–	**7**	*25*	**11**
36.–37.	*Dinh Huy Nhat Minh*	G, Kadaň	–	–	–	–	–	–	**–**	*67*	**10**
36.–37.	*Anežka Žádníková*	ZŠ, Tišnov, Smíškova 840	3	0	–	–	1	–	**4**	*43*	**10**
38.–41.	*Tomáš Hlavatý*	G, Kadaň	–	–	–	–	–	–	**–**	*69*	**9**
38.–41.	*Tamara Maňáková*	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	**–**	*100*	**9**
38.–41.	*Matěj Pur*	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	**–**	*60*	**9**
38.–41.	*Jan Touš*	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	**–**	*69*	**9**
42.–45.	*Alžběta Andrýsková*	G, Olomouc – Hejčín	3	0	–	–	–	–	**3**	*67*	**8**
42.–45.	*Filip Oplt*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	**–**	*62*	**8**
42.–45.	*Petr Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	0	–	–	–	–	**3**	*31*	**8**
42.–45.	*Jonáš Uřičář*	CZŠ Veselí nad Moravou	3	–	3	0	–	–	**6**	*62*	**8**
46.–48.	*Daniel Bobek*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	2	1	–	–	**3**	*39*	**7**
46.–48.	*Daniel Hrdinka*	ZŠ Trutnov, Komenského 399	–	–	–	–	–	–	**–**	*70*	**7**
46.–48.	*Kateřina Volková*	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	**–**	*47*	**7**
49.–50.	*Kateřina Fuková*	G, Ohradní, Praha-Michle	–	–	–	–	–	–	**–**	*100*	**6**
49.–50.	*Markéta Holubová*	G Christiana Dopplera, Praha	2	0	0	–	–	–	**2**	*38*	**6**
51.–54.	*Tereza Havelková*	ZŠ Loštice	–	–	–	–	–	–	**–**	*83*	**5**
51.–54.	*Jakub Horáček*	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	–	–	–	–	–	**–**	*38*	**5**
51.–54.	*Kateřina Škorvánková*	G a SOŠ, Rokycany	–	–	1	–	–	–	**1**	*38*	**5**
51.–54.	*Lukáš Winkler*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	**–**	*38*	**5**
55.	*Pavel Herinek*	ZŠ Luhačovice	–	–	–	–	–	–	**–**	*67*	**4**
56.	*Michaela Čermáková*	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	–	–	–	–	–	–	**–**	*33*	**3**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	3	5	4	4	**22**	*100*	**48**
1.	*Jan Preiss*	G, Lovosice	3	3	3	1	4	3	**17**	*81*	**39**
2.	*Denisa Chytilová*	G J. Škody, Přerov	3	–	3	–	4	4	**14**	*85*	**34**
3.	*Ondřej Konicar*	ZŠ Bílovice nad Svitavou	3	1	0	1	3	2	**10**	*54*	**26**
4.	*Anna Mlezivová*	G P. de Coubertina, Tábor	3	2	3	4	2	2	**16**	*81*	**25**
5.–6.	*Tomáš Dvořák*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	1	1	1	1	–	**7**	*50*	**22**
5.–6.	*Linda Penčová*	ZŠ Brno, Kneslova 28	3	–	3	0	–	–	**6**	*71*	**22**
7.	*Lukáš Vlček*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	–	3	1	–	–	**7**	*83*	**20**
8.–11.	*Dan Kellner*	ZŠ Karlovy Vary, Krušnohorská 11	3	–	–	–	3	–	**6**	*63*	**19**
8.–11.	*Jiří Křesák*	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	3	1	3	–	–	4	**11**	*66*	**19**
8.–11.	*Alois Medek*	ZŠ a MŠ Čkyně	3	0	–	–	2	–	**5**	*63*	**19**
8.–11.	*Michal Zobaník*	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	2	2	1	0	3	2	**10**	*45*	**19**
12.	*Ondřej Teplík*	ZŠ Ústí nad Labem, Stříbrnická	3	–	3	1	1	–	**8**	*44*	**18**
13.–14.	*Eliška Cejnarová*	G a SOŠ, Jaroměř	3	0	0	–	1	–	**4**	*52*	**17**
13.–14.	*Yan Stepanyshyn*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	–	–	3	–	1	1	**5**	*46*	**17**
15.–18.	*Richard Fleischhans*	G, Benešov	1	3	1	–	–	–	**5**	*73*	**16**
15.–18.	*Jiří Nábělek*	ZŠ a MŠ Chuchelná	3	–	2	–	–	–	**5**	*50*	**16**
15.–18.	*Josef Pekař*	ZŠ Vodňany, Alešova 50	2	–	0	1	1	–	**4**	*52*	**16**
15.–18.	*Tereza Vlčková*	ZŠ Znojmo, nám. Republiky 9	–	–	–	–	–	–	–	*62*	**16**
19.–22.	*Martin Hejl*	1. ZŠ TGM Milevsko	3	2	2	–	–	–	**7**	*58*	**15**
19.–22.	*Lukáš Neshyba*	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	–	–	–	–	–	–	–	*58*	**15**
19.–22.	*Adam Šišpera*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	3	0	3	0	0	0	**6**	*37*	**15**
19.–22.	*Veronika Venclová*	ZŠ, Nasavrky	3	–	0	–	2	–	**5**	*50*	**15**
23.–26.	*Vít Beran*	Masaryovo G, Plzeň	3	–	–	–	–	1	**4**	*42*	**14**
23.–26.	*Jiří Hanák*	G J. Škody, Přerov	3	–	3	–	–	–	**6**	*88*	**14**
23.–26.	*Monika Machalová*	Slovanské G, Olomouc	–	1	0	–	0	2	**3**	*39*	**14**
23.–26.	*Adéla Seidelmannová*	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	3	1	–	–	–	–	**4**	*88*	**14**
27.–29.	*Petr Bečvář*	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	–	–	2	–	–	–	**2**	*81*	**13**
27.–29.	*Vladimír Jirka*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	*65*	**13**
27.–29.	*Matouš Pikous*	Podještědské G, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**13**
30.–33.	*Zuzana Klimsová*	G Jihlava	–	0	–	–	–	–	**0**	*69*	**11**
30.–33.	*Pham Lan Phuong*	G Cheb	3	–	2	–	–	–	**5**	*92*	**11**
30.–33.	*David Slavíček*	G Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	*55*	**11**
30.–33.	*Jan Trejbal*	G Luďka Pika, Plzeň	3	0	2	–	–	–	**5**	*58*	**11**
34.–41.	*Viktorie Grussmannová*	Mendlovo G, Opava	1	0	–	–	–	1	**2**	*40*	**10**
34.–41.	*Radka Janků*	G, Ostrov	–	–	–	–	–	–	–	*53*	**10**
34.–41.	*Barbora Jedličková*	ZŠ a MŠ Tasovice	–	–	–	–	3	–	**3**	*33*	**10**
34.–41.	*Vojtěch Melichar*	ZŠ, Liberec, Oblačná	3	–	–	–	–	–	**3**	*111*	**10**
34.–41.	*Pham The Huynh Duc*	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	*77*	**10**
34.–41.	*Andrea Podskalská*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	*59*	**10**
34.–41.	*Daniel Ridzoň*	ZŠ Norbertov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**10**
34.–41.	*Petr Schonherr*	ZŠ Liberec, Sokolovská 328	–	–	–	–	–	–	–	*77*	**10**
42.–44.	*Petr Hebký*	ZŠ Jihlava, Křížová 33	1	0	0	0	1	–	**2**	*29*	**9**
42.–44.	*Martin Orság*	G a SOŠZZE Vyškov	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**9**
42.–44.	*Jan Rosenthaler*	2. ZŠ Plzeň	0	0	0	1	–	–	**1**	*23*	**9**
45.–48.	*Helena Havelková*	Biskupské G, Brno	2	2	–	–	1	1	**6**	*50*	**8**
45.–48.	*Michaela Kleslová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	–	–	–	–	–	–	–	*40*	**8**
45.–48.	*Antonín Krmíček*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	*80*	**8**
45.–48.	*Ondřej Šrámek*	ZŠ 8. května, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	*47*	**8**
49.–56.	*Radek Gadas*	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	–	–	–	2	–	**2**	*41*	**7**
49.–56.	*Hana Hladíková*	G, Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*54*	**7**
49.–56.	*Michaela Kovandová*	G, Nad Štolou Praha	–	–	–	–	–	–	–	*44*	**7**
49.–56.	*Jan Macháček*	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	*78*	**7**
49.–56.	*Martin Repčík*	G, Olomouc – Hejčín	2	–	–	–	–	–	**2**	*58*	**7**
49.–56.	*Matěj Suchánek*	ZŠ a MŠ Bílovice	–	–	–	–	–	–	–	*41*	**7**
49.–56.	*Veronika T[illegible]*	[illegible]	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	**1**	*44*	**7**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**II**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	3	3	4	7	4	**24**	*100*	**50**
49.–53.	*Aneta Fajstlová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	*56*	**5**
49.–53.	*Ludmila Fridrichová*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	–	–	*29*	**5**
49.–53.	*Bohumil Hora*	Podkrušnohorské G, Most	–	–	–	–	–	–	–	*38*	**5**
49.–53.	*Petr Kučera*	ZŠ J. Hlávky Přeštice	–	–	–	–	–	–	–	*31*	**5**
49.–53.	*Silvie Zbořilová*	G, Jeseník	–	1	0	–	1	–	**2**	*21*	**5**
54.	*Veronika Vávrová*	ZŠ újezd, Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	*31*	**4**
55.–57.	*Roman Krása*	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	0	1	–	**1**	*15*	**3**
55.–57.	*David Němec*	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	*75*	**3**
55.–57.	*Kristýna Zubzandová*	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	*33*	**3**
58.–61.	*Jan Houkar*	ZŠ a MŠ Mirovice	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**2**
58.–61.	*Vlastislav Hozák*	ZŠ Opava, E. Beneše 2	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**2**
58.–61.	*Veronika Králová*	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*33*	**2**
58.–61.	*Veronika Stratilová*	ZŠ a MŠ Hrabišín	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**2**

FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail pro řešení: `vyfuk-reseni@fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.