

jméno	škola	I	2	3	4	E	C	II	%	Σ
Student Páňij	MFF UK	3	3	3	4	7	4	24	100	50
49–53. Aneta Fajstlová	G Brno, tr. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	56	5
49–53. Ludmila Fritrichová	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	–	–	29	5
49–53. Bohumil Hora	Podkrusňohorské G, Most	–	–	–	–	–	–	–	38	5
49–53. Petr Kučera	ZŠ J. Hlávky Přestice	–	–	–	–	–	–	–	31	5
49–53. Silvie Zbořilová	G, Jeseník	–	1	0	–	1	–	–	21	5
54. Veronika Vávřová	ZŠ újezd, Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	31	4
55–57. David Nemec	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	15	3
55–57. Roman Krása	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	75	3
55–57. Kristýna Zubandová	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	33	3
58–61. Jan Houkar	ZŠ a MŠ Mirovice	–	–	–	–	–	–	–	100	2
58–61. Vlastislav Hozák	ZŠ Opava, E. Beneše 2	–	–	–	–	–	–	–	100	2
58–61. Veronika Králová	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	–	–	–	–	–	–	–	33	2
58–61. Veronika Stránilová	ZŠ a MŠ Hrabšín	–	–	–	–	–	–	–	100	2

FYKOS – Vřfuk
 UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
 Ústav teoretické fyziky
 V Holešovičkách 2
 18000 Praha 8

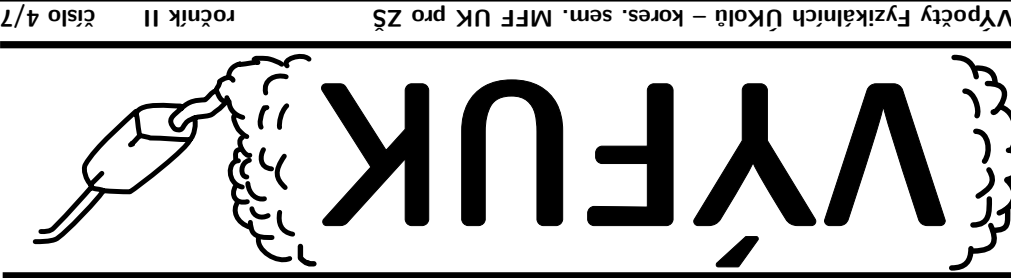


www: <http://vřfuk.fykos.cz>
 e-mail pro řešení: vřfuk-reseni@fykos.cz
 e-mail: vřfuk@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK, je zastižen Oddělením pro větší vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

jméno	škola	I	2	3	4	E	C	II	%	Σ
Student Páňij	MFF UK	3	3	3	4	7	4	24	100	50
49–53. Aneta Fajstlová	G Brno, tr. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	56	5
49–53. Ludmila Fritrichová	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	–	–	29	5
49–53. Bohumil Hora	Podkrusňohorské G, Most	–	–	–	–	–	–	–	38	5
49–53. Petr Kučera	ZŠ J. Hlávky Přestice	–	–	–	–	–	–	–	31	5
49–53. Silvie Zbořilová	G, Jeseník	–	1	0	–	1	–	–	21	5
54. Veronika Vávřová	ZŠ újezd, Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	31	4
55–57. David Nemec	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	15	3
55–57. Roman Krása	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	75	3
55–57. Kristýna Zubandová	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	33	3
58–61. Jan Houkar	ZŠ a MŠ Mirovice	–	–	–	–	–	–	–	100	2
58–61. Vlastislav Hozák	ZŠ Opava, E. Beneše 2	–	–	–	–	–	–	–	100	2
58–61. Veronika Králová	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	–	–	–	–	–	–	–	33	2
58–61. Veronika Stránilová	ZŠ a MŠ Hrabšín	–	–	–	–	–	–	–	100	2



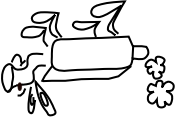
Výpochy Fyzikálních Úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ

ročník II číslo 4/7

Úvodem

Milí řešitelky a milí řešitelé,
 v této brožurce naleznete zadání již čtvrté série, vzorová řešení a výsledkově historii série druhé. Studijní text a přidružené úlohy vás tentokrát uvedou do základního použití goniometrických funkcí.
 Dale dáваме na vědomí, že 26.–28. dubna proběhne další (jarní) setkání řešitelů. Opat se budete mít na co těšit, tak si vyhraďte místo v kalendáři. Podrobnější informace se dozvíte v příští brožurce.
 Přejeme mnoho dobrých nápadů při řešení!

Organizátoři



Zadání IV. série



Termín uploadu: 5. března 2013 20.00
 Termín odeslání: 4. března 2013

Úloha IV.1 ... Lázeň

3 body

Franta z Rána se jde myt. Má pokazený bojler, tak si vodu ohřeje na sporáku. Od minulého koupaní ví, že když připravovaná voda ve vaně bude mít 47°C, než se svlékne a ponoří se do ní, bude

Úloha IV.3 ... Střela II.

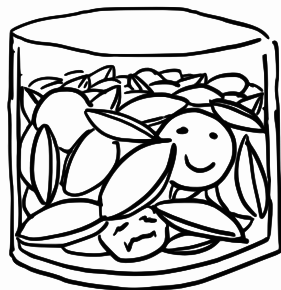
4 body

Minule jsme si ukazovali, jak za pomoci tajů kinematiky a rotujících kotoučů určit rychlost letícího broku ze vzduchovky. Nyní si ukážeme obdobný experiment, avšak upotřebíme polystyrenového kyvadla, které zavěsíme na tenké lanko ke stropu a do něhož následně vypálíme brok. Kyvadlo se po dopadu střely vychýlí z rovnovážné polohy horizontálně o 9 cm. Určete rychlost letící střely před nárazem do kyvadla. Hmotnost střely je 0,5 g, hmotnost kyvadla 625 g, délka lanka 3,8 m, naměřená výchylka 9 cm. **Pozor**, kulka po vniku do polystyrenu přemění většinu své energie na teplo!

Úloha IV.4 ... Rozbitý teploměr

4 body

Při posledním experimentu v laboratoři se matfyzákům podařilo náhodou rozbít velký rtuťový teploměr. V teploměru zůstala kapička rtuti dlouhá $h = 10$ cm, která v něm uzavírá vzduch. Když je směrem k zemi otočený rozbitý konec teploměru, vzduchová bublina je dlouhá $l_1 = 21,5$ cm. A když k zemi směřuje zatavený konec teploměru, tíha rtuti vzduch v něm stlačí na délku $l_2 = 16,5$ cm. Z těchto údajů vypočítejte atmosferický tlak. Hustota rtuti je $\rho = 13\,500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a tíhové zrychlení je $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Úloha IV.E ... Čočka

5 bodů

Vezměte si sklenici a nasypete do ní čočku. Jak můžete vidět, v čočce jsou vzduchové mezery. Změřte, jakou část objemu sklenice tvoří tyto mezery. Měření opakujte i pro krystalový cukr. Jako obvykle, pořádně popište, jak jste měření provedli, a nezapomeňte ho vícekrát opakovat.

Úloha IV.C ... Goniometrická

5 bodů

- a) Na Higgsův boson (částice) působí dvě síly, jejichž vektory svírají úhel $\pi/6$. První síla je velká 5 N, druhá je velká 4 N a je téže orientace. Jaká je velikost výsledné síly?
Pomůcka Nakreslete si obrázek.
- b) V historické části textu jsme se dozvěděli, že Hipparchos odvodil vztah pro výpočet délky tětiny příslušné (tedy v závislosti na) danému středovému úhlu. Odvodte jej také.
- c) Odvodte pomocí součtových vzorců vzorce pro $\sin(2\alpha)$ a $\cos(2\alpha)$.

Kategorie osmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
Student	Pilný	3	3	3	5	4	4	22	100	48
1. Jan Preiss	G, Lovosice	3	3	3	1	4	3	17	81	39
2. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	3	-	3	-	4	4	14	85	34
3. Ondřej Konícar	ZŠ Bílovice nad Svitavou	3	1	0	1	3	2	10	54	26
4. Anna Mlezivová	G P. de Coubertina, Tábor	3	2	3	4	2	2	16	81	25
5.-6. Tomáš Dvořák	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	1	1	1	1	-	7	50	22
5.-6. Linda Penčová	ZŠ Brno, Kneslova 28	3	-	3	0	-	-	6	71	22
7. Lukáš Vlček	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	-	3	1	-	-	7	83	20
8.-11. Dan Kellmer	ZŠ Karlovy Vary, Krušnohorská 11	3	-	-	-	3	-	6	63	19
8.-11. Jiří Křesák	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	3	1	3	-	-	4	11	66	19
8.-11. Alois Medek	ZŠ a MŠ Čkyně	3	0	-	-	2	-	5	63	19
8.-11. Michal Zobaník	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	2	2	1	0	3	2	10	45	19
12. Ondřej Teplík	ZŠ Ústí nad Labem, Stříbrnická	3	-	3	1	1	-	8	44	18
13.-14. Eliška Cejnarová	G a SOŠ, Jaroměř	3	0	0	-	1	-	4	52	17
13.-14. Yan Stepanyshyn	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	-	-	3	-	1	1	5	46	17
15.-18. Richard Fleischhans	G, Benešov	1	3	1	-	-	-	5	73	16
15.-18. Jiří Nábělek	ZŠ a MŠ Chuchelná	3	-	2	-	-	-	5	50	16
15.-18. Josef Pekař	ZŠ Vodňany, Alešova 50	2	-	0	1	1	-	4	52	16
15.-18. Tereza Vlčková	ZŠ Znojmo, nám. Republiky 9	-	-	-	-	-	-	-	62	16
19.-22. Martin Hejl	1. ZŠ TGM Milevsko	3	2	-	-	-	-	7	58	15
19.-22. Lukáš Neshyba	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	-	-	-	-	-	-	-	58	15
19.-22. Adam Šišpera	G J. A. Komenského, Uh. Brod	3	0	3	0	0	0	6	37	15
19.-22. Veronika Venclová	ZŠ, Nasavrky	3	-	0	-	2	-	5	50	15
23.-26. Vít Beran	Masaryovo G, Plzeň	3	-	-	-	-	1	4	42	14
23.-26. Jiří Hanák	G J. Škody, Přerov	3	-	3	-	-	-	6	88	14
23.-26. Monika Machalová	Slovanské G, Olomouc	-	1	0	-	0	2	3	39	14
23.-26. Adéla Seidelmannová	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	3	1	-	-	-	-	4	88	14
27.-29. Petr Bečvář	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	-	-	2	-	-	-	2	81	13
27.-29. Vladimír Jirka	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	65	13
27.-29. Matouš Pikosová	Podještědské G, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	50	13
30.-33. Zuzana Klímsová	G Jihlava	-	0	-	-	-	-	0	69	11
30.-33. Pham Lan Phuong	G Cheb	3	-	2	-	-	-	5	92	11
30.-33. David Slavíček	G Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	55	11
30.-33. Jan Trejbal	G Luďka Píka, Plzeň	3	0	2	-	-	-	5	58	11
34.-41. Viktorie Grussmannová	Mendlovo G, Opava	1	0	-	-	-	1	2	40	10
34.-41. Radka Janků	G, Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	53	10
34.-41. Barbora Jedličková	ZŠ a MŠ Tasovice	-	-	-	-	3	-	3	33	10
34.-41. Vojtěch Melichar	ZŠ, Liberec, Oblačná	3	-	-	-	-	-	3	111	10
34.-41. Pham The Huynh Duc	G, Šumperk	-	-	-	-	-	-	-	77	10
34.-41. Andrea Podskalská	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	-	-	-	-	-	-	-	59	10
34.-41. Daniel Řidzoň	ZŠ Norbertov, Praha	-	-	-	-	-	-	-	50	10
34.-41. Petr Schonherr	ZŠ Liberec, Sokolovská 328	-	-	-	-	-	-	-	77	10
42.-44. Petr Hebký	ZŠ Jihlava, Křížová 33	1	0	0	0	1	-	2	29	9
42.-44. Martin Orság	G a SOŠZZE Vyškov	-	-	-	-	-	-	-	100	9
42.-44. Jan Rosenthaler	2. ZŠ Plzeň	0	0	0	1	-	-	1	23	9
45.-48. Helena Havelková	Biskupské G, Brno	2	2	-	-	1	1	6	50	8
45.-48. Michaela Kleslová	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	-	-	-	-	-	-	-	40	8
45.-48. Antonín Krmíček	G Uherské Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	80	8
45.-48. Ondřej Šrámek	ZŠ 8. května, Šumperk	-	-	-	-	-	-	-	47	8
49.-56. Radek Gadas	ZŠ, Liberec, Oblačná	-	-	-	-	2	-	2	41	7
49.-56. Hana Hladíková	G, Nad Kavalírkou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	54	7
49.-56. Michaela Kovandová	G, Nad Štolou Praha	-	-	-	-	-	-	-	44	7
49.-56. Jan Macháček	G L. Jaroše, Holešov	-	-	-	-	-	-	-	78	7
49.-56. Martin Repčík	G, Olomouc – Hejčín	2	-	-	-	-	-	2	58	7
49.-56. Matěj Suchánek	ZŠ a MŠ Bílovice	-	-	-	-	-	-	-	41	7
49.-56. Veronika Tupa		1	-	-	-	-	-	1	11	7

Úhel

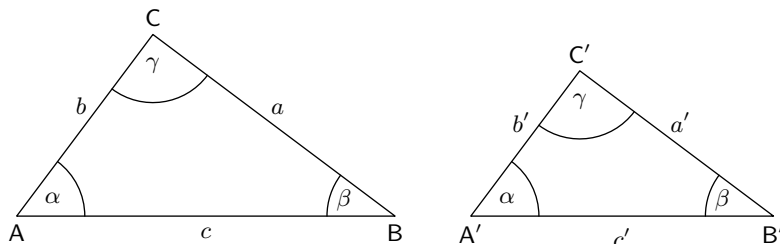
Definice úhlu popsána výše nám říká, že úhel je vlastně částí roviny. Musíme tedy rozlišovat mezi termíny úhel a velikost úhlu, s níž pracují goniometrické funkce. Proto se budeme bavit o tom, jak zapsat velikost úhlu.

Dnes se můžete setkat se dvěma různými jednotkami. Díky novověkému pohledu na goniometrické funkce a jejich užití ve vyšší matematice a ve fyzice je přirozenější úhly vyjadřovat v obloukové míře s jednotkou radiánů namísto stupňové. Jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Z této definice vyplývá, že plný úhel má 2π radiánů ($1 \text{ rad} \doteq 57,3^\circ \doteq 57^\circ 17' 45''$). Převody mezi stupni a radiány hledejte v tabulce níže. Samotné slovo radián navrhl v roce 1871 Jameson Thomson.

Zpravidla se však z dobrých důvodů označení radiánů neuvádí a ztotožňuje se s jedničkou, takže například $2\pi \text{ rad} = 2\pi = 360^\circ$.

Zavedení trigonometrických funkcí

Definovat goniometrické funkce můžeme hned několika způsoby, my si však zatím ukážeme ten nejjednodušší – v pravoúhlém trojúhelníku.



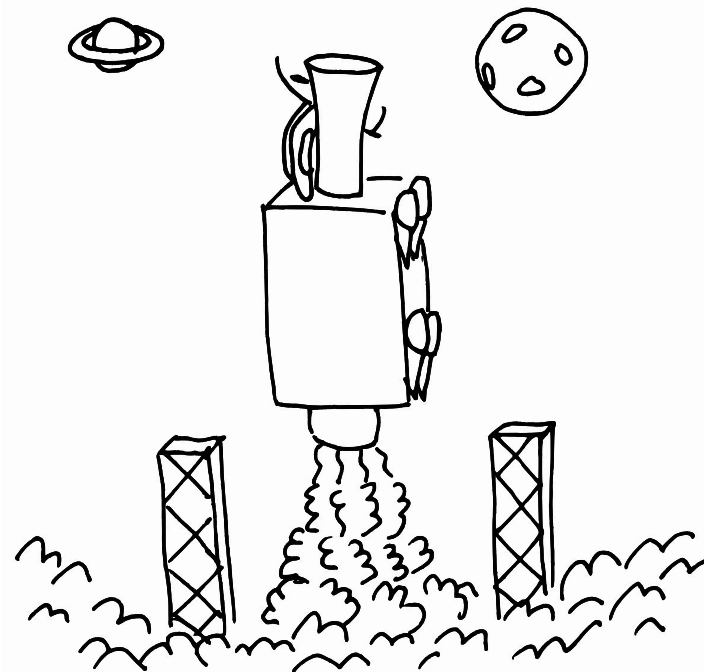
Obr. 1: Podobné trojúhelníky

Na obrázku vidíme dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a A'B'C' se shodným úhlem α . Jsou tedy podobné podle věty uu, z čehož plynou rovnosti následujících poměrů:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \quad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

Vidíme, že tyto poměry jsou vždy kladné a u všech podobných pravoúhlých trojúhelníků shodné, resp. nezávisí na délkách jejich stran, ale jen a pouze na velikosti vnitřního úhlu α



Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	E	C	II	%	Σ
Student	MFF UK	3	3	3	5	4	4	22	100	48
1. Erik Kočandrlé	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	3	3	1	4	4	18	81	39
2. Markéta Kaiserová	ZŠ Schulz. sady, Dvůr Králové	3	1	3	3	4	4	18	67	32
3. Václav Brož	G Christiana Dopplera, Praha	3	0	3	-	-	4	10	73	22
4. Veronika Přikrylová	G J. Škody, Přerov	3	2	0	2	2	-	9	48	21
5.-9. Ludmila Hlávková	ZŠ Šlapanice	3	1	-	-	-	3	7	53	19
5.-9. Ivana Horáčková	G Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	73	19
5.-9. Eleonora Krůtová	Klvaňovo G Kyjov	-	-	-	-	-	4	4	83	19
5.-9. Kateřina Pšeničková	ZŠ, Lupáčova, Praha	3	-	3	-	-	-	6	59	19
5.-9. Jakub Sochor	G, Blovce	0	2	2	0	2	-	6	50	19
10.-12. Lucie Hercíková	G O. Březiny a SOŠ, Telč	-	0	-	-	2	2	4	46	17
10.-12. Martin Křemek	G, Hranice	-	-	-	-	-	-	-	65	17
10.-12. Ladislav Trnka	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	3	-	3	-	-	1	7	74	17
13.-14. Nikola Bartková	G, Olomouc – Hejčín	3	-	-	-	-	-	3	55	16
13.-14. Kateřina Rosická	G J. Ortena, Kutná Hora	3	2	1	-	-	4	10	84	16
15. Jan Pokorný	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	88	14
16.-17. Tadeáš Erban	ZŠ a MŠ Petřiny – jih, Praha	3	1	2	-	1	-	7	45	13
16.-17. Josef Sabol	G, Chotěboř	-	-	-	-	-	-	-	50	13
18. Klára Adámková	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	2	1	3	71	12
19.-20. Ondřej Charvát	První české G, Karlovy Vary	-	-	-	-	3	2	5	71	10
19.-20. Jan Procházka	G, Židlochovice	-	-	-	-	-	-	-	77	10
21.-25. David Hudák	ZŠ a MŠ Ořechov	-	0	-	-	2	-	2	27	9
21.-25. Martina Ivanová	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	-	-	-	-	-	-	-	56	19
21.-25. Michael Mallý	ZŠ JIH, Mariánské Lázně	-	-	-	-	-	-	-	53	9
21.-25. Martin Motejlek	SG Dr. Randv. Jablonec n. N.	-	-	3	-	-	-	3	100	9

k němž tyto poměry vztahujeme. Tento poměrům říkáme sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans¹ úhlu α

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} & \cos \alpha &= \frac{c}{b} & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b}{a} \\ \cot \alpha &= \frac{a}{b} & \sec \alpha &= \frac{b}{c} & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Musíme si vždy uvědomit, ke kterému úhlu dané funkce vztahujeme. Například sinus úhlu β bude poměr stran b a c , ne a a b jako pro úhel α !

Vzhledem k tomu, že jsme zavedli pouze trigonometrické funkce, v trojúhelníku, můžeme dosazovat úhly v rozmezí $(0^\circ; 90^\circ) \Leftrightarrow (0; \pi/2)$.

Tabulka základních úhlů

Tabulka I: Důležité hodnoty goniometrických funkcí

α	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nexistuje

K čemu je to vlastně dobré?

Ukážeme si nejjednodušší použití na následujícím příkladu: Určete délky všech stran pravoúhlehého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C , vte-li, že při běžném značení (proti vrcholu A je strana a a úhel při něm je α , stejnějm způsobem i pro ostatní vrcholy, strany a úhly) $\beta = 60^\circ$ a $|AB| = 6$. Z definice sinu platí

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{|AC|}{|AB|}, \\ |AC| &= |AB| \sin \beta, \\ |AC| &= 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

¹ V dnešní době se sekans a kosekans mimo anglosaský svět příliš nepoužívají, proto se těmito funkcemi nebudeme v našem textu dále zabývat.

Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	%	II	E	C	4	3	5	4	4	22	100	48
1. Miroslav Šafář	ZŠ, Znojmo, Mladěže 3	3	0	2	0	1	4	10	54	26	50	13	7
2. Martin Schmeid	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	78
3.-4. Petr Kolář	ZŠ Strakonice, Dukelská	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	88
5.-7. Pavla Mašková	2. ZŠ JAK Milevsko	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	83
5.-7. Nora Prokešová	První české G, Karlovy Vary	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	100
5.-7. Marta Stehliková	Masarykova ZŠ, Zdáňice	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	83
8.-9. Vít Kucera	1. ZŠ TGM Milevsko	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	44
8.-9. Václav Neuyhoštěný	ZŠ Letovice	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	67
10. Martin Burect	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	33
11.-12. Nikola Müllerová	ZŠ Nova Paka, Husitská	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	100
11.-12. Pavel Svoboda	ZŠ Jilovská, Praha	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	100
13.-15. Tereza Brezňnová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	50
13.-15. Tereza Burtanová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	14
13.-15. Kateřina Hleďáková	ZŠ TGM, Bojkovice	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	50
16.-18. Ondřej Benáček	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
16.-18. Tomáš Kudera	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0
16.-18. Romana Nehybová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0

Zbývající stranu můžeme dopočítat pomocí Pythagorovy věty, my však použijeme opět trigonometrii.

Protože

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

tak

$$\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

Pro sinus úhlu α platí:

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|},$$

$$|BC| = |AB| \sin \alpha,$$

$$|BC| = 6 \cdot \sin 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Trojúhelník ABC má tedy strany délky 6; 3 a $3\sqrt{3}$.

Rozšíření na obecný trojúhelník

Trigonometrické funkce se dají používat kromě pravoúhlého i v obecném trojúhelníku. Toto zobecnění s sebou přináší nutnost rozšíření definičního oboru i na tupé úhly (tedy na interval $[0; \pi]$).

Abychom mohli dopočítávat délky stran v libovolném trojúhelníku, budeme potřebovat znát nové trigonometrické identity, jimiž jsou sinová a kosinová věta. Při běžném značení platí:

- sinová věta

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

- kosinová věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Všimněme si, že jestliže bude trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, přechází třetí rovnice do tvaru Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ (protože $\cos(\pi/2) = 0$).

Zavedení goniometrických funkcí

Jestliže definujeme goniometrické funkce pomocí tzv. jednotkové kružnice², můžeme dále rozšířit definiční obor těchto funkcí³. Takto definované funkce jedné proměnné nacházejí široké uplatnění napříč matematikou, fyzikou a jinými obory. Na dalších řádcích popíšeme některé vlastnosti jednotlivých funkcí na rozšířeném definičním oboru:

²Pro zájemce http://cs.wikipedia.org/wiki/Jednotková_kružnice

³Definiční obor je množina všech čísel, které můžeme do funkce dosadit.

Kolmý vektor k vektorům \mathbf{e} a \mathbf{f} vytvoříme pomocí vektorového součinu zadaných vektorů. Takový vektor bude kolmý na rovinu, ve které leží vektory \mathbf{e} a \mathbf{f} , a tedy i k těmto vektorům.

$$\mathbf{e} \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 6 \\ 15 - 28 \\ -8 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

- c) Velikost vektorového součinu daných vektorů \mathbf{e} a \mathbf{f} je obsah rovnoběžníku, jehož strany tvoří tyto vektory. Polovina takového rovnoběžníku je hledaný obsah trojúhelníku.

$$|\mathbf{e} \times \mathbf{f}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{13^2 + (-13)^2 + (-13)^2} = \sqrt{3 \cdot 13^2} = \sqrt{3} \cdot 13 \doteq 22,52,$$

$$S = \frac{|\mathbf{e} \times \mathbf{f}|}{2} = \frac{13}{2} \sqrt{3} \doteq 11,26.$$

Chtěli bychom poděkovat Matěji Mezerovi, který nás upozornil na následující chybu v textu seriálu. Namísto vzorce

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi$$

je správně

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin \varphi.$$

Eliška Pilátová
eliska@fykos.cz

b) Ke každému vektoru z předchozí úlohy najdete kolmý vektor. Jaky by byl vektor kolmý zároveň k oběma vektorům $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

c) Určete obsah trojúhelníku, jehož dvě strany jsou vektory \mathbf{e} a \mathbf{f} .

a) Vektor \mathbf{a} vypočteme sečtením jednotlivých složek zadaných vektorů. Vektor \mathbf{b} naopak jejich odečtením. V jakém pořadí se rozhodneme vektory odčítat nám ovlivní pouze orientaci výsledného vektoru, ale jeho velikost a směr budou stejné.

$$\mathbf{a} = \mathbf{n} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} n_1 + v_1 \\ n_2 + v_2 \\ n_3 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 5 \\ 1 + 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{n} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} n_1 - v_1 \\ n_2 - v_2 \\ n_3 - v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 5 \\ -2 - 5 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Úhel svrtný vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} lze snadno zjistit ze vzorečku uvedeného v textu seriálu.

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{|a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{3 \cdot (-7) + 3 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-1)^2}} = -0,8,$$

$$\varphi = 143,13^\circ.$$

b) Kolmé vektory svrtají úhel 90° a jejich skalární součin se tedy rovná

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Pro zjištění kolmých vektorů dosadíme do vztahu pro skalární součin jeden z vektorů. Kolmý vektor \mathbf{g} k vektoru \mathbf{n} určíme následujícími zpusobem

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = n_1 \cdot g_1 + n_2 \cdot g_2 = -2g_1 + 1g_2 = 0.$$

Jednu ze složek hledaného vektoru \mathbf{g} můžeme zvolit libovolně a druhou dopočeteme ze vztahu výše. Potom může vektor \mathbf{g} vypadat například

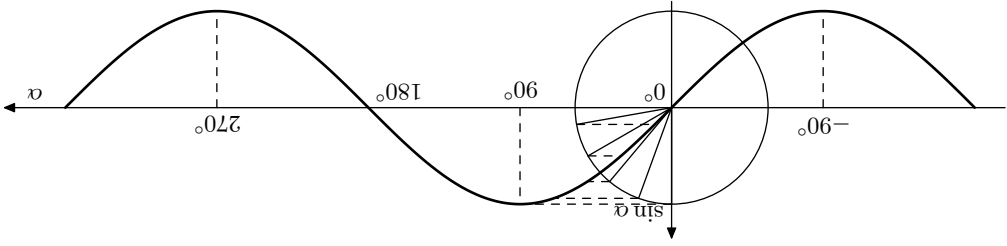
$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Další kolmé vektory \mathbf{h} , \mathbf{i} , \mathbf{j} k vektorům \mathbf{v} , \mathbf{a} , \mathbf{b} se určí obdobně. Například můžeme získat následující vektory

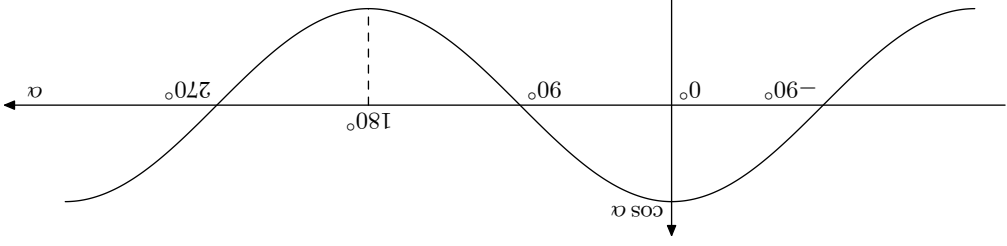
$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Otočením původního vektoru o 90° kolem počátku získáme také kolmý vektor. Pokud si to nactrhneme do kartézské soustavy souřadnic, můžeme si všimnout, že výsledný kolmý vektor se liší od původního pouze prohozením souřadnic vektoru a změnou znaménka u jedné souřadnice. Např. nalezně vektory \mathbf{g} , \mathbf{h} a \mathbf{j} a \mathbf{f} jako vektory otočené o 90° a mají stejnou délku jako původní vektory.

Sinus a kosinus tyto dvě funkce mají velmi podobné vlastnosti, do obou můžeme dosadit jakékoli číslo, obě vám na výstupu daří číslo od -1 do 1 . Obě jsou to periodické funkce s periodou 2π . Pokud tedy do funkci dosadíme úhel o libovolný násobek 2π větší, dostaneme to samé číslo. Platí tedy pro ně vztahy $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ a $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, k je libovolné celé číslo. Sinus je lichá funkce, symbolicky tedy $\sin(-x) = -\sin(x)$, zatímco kosinus je funkce sudá, tedy $\cos(-x) = \cos(x)$.



Obr. 2: Sinusoida

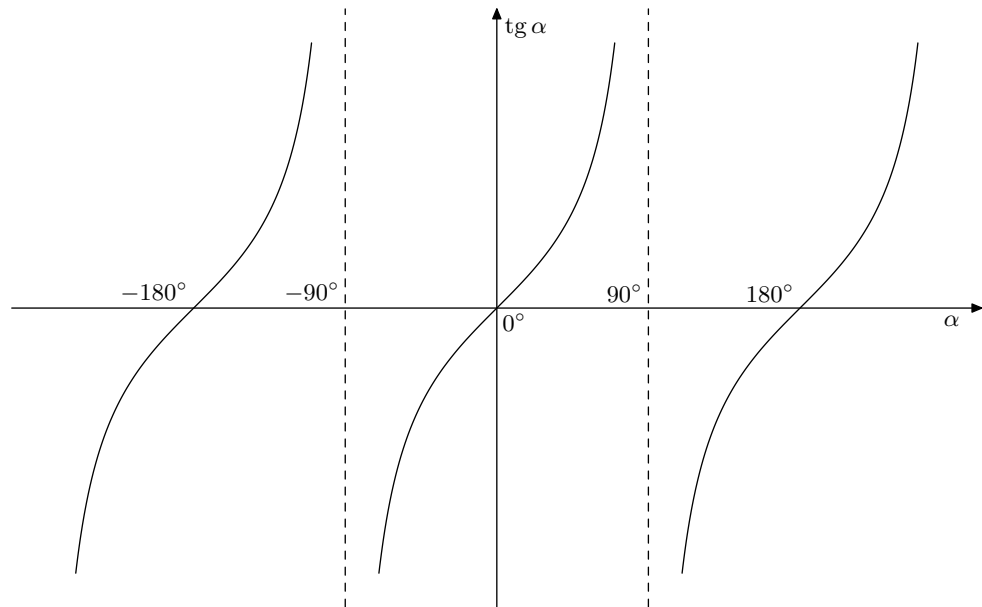


Obr. 3: Kosinusoida

Tangens je definovaný jako podíl sinu a kosinu. V matematice nemůžeme dělit nulou, proto tangens existuje jenom v bodech x , pro které $\cos(x) \neq 0$. Nemůžeme tedy dosazovat úhly $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ atd. Funkce na výstupu dává všechna reálná čísla, tedy i větší jako 1 nebo menší jako -1 . Jedná se o lichou periodickou funkci (perioda je π): $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$, $\text{tg}(x + k\pi) = \text{tg}(x)$.
Kotangens je definovaný jako podíl kosinu a sinu, proto musí platit $\sin(x) \neq 0$. Můžeme dosazovat tedy cokoliv s výjimkou všech násobků úhlu π . Stejně jako tangens nám dá jakékoli číslo a je to také lichá a periodická funkce: $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}(x)$ a $\text{cotg}(x + k\pi) = \text{cotg}(x)$.

Cyklotrické funkce

Dosud jsme řešili pouze problém hledání funkční hodnoty pro daný úhel, například $\sin(30^\circ) = ?$. Co když ale máme danou pouze onu funkční hodnotu a máme zjistit, kterému úhlu náleží – kupříkladu $\sin(x) = 0,5$; $x = ?$. K tomuto účelu slouží právě cyklotrické funkce, které jsou jen jiným označením pro inverzní funkce ke goniometrickým funkcím (tzn., že do nich „hodíme“



Obr. 4: Tangenta

jinak funkční hodnotu a „vypadne“ z ní hodnota úhlu). Slovní označení jsou arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg). Na kalkulačkách se z důvodu úspory místa setkáme spíše s označením \sin^{-1} , \cos^{-1} apod., neptejte si toto označení s mocninami, nejedná se o převrácené hodnoty goniometrických funkcí.

Jedné hodnotě sinu a kosinu připadá nekonečně mnoho úhlů, přičemž úhel, který patří do intervalu $[0^\circ; 360^\circ] = [0; 2\pi]$ nazýváme úhlem základním.

Základní goniometrické vzorce

Při různých výpočtech se jistě setkáte s nutností zjednodušit nějaký hrůzostrašně vypadající výraz. K tomu vám jistě přijdou vhod následující identity.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Pokud vás budou zajímat další vztahy, třeba pro tangens, neváhejte a najděte si je.

Fyzikální aplikace

Goniometrické vzorce nachází uplatnění, jak již bylo řečeno, napříč celou matematikou, fyzikou a technickými obory. Při řešení tohoto semináře se jistě setkáte s těmito funkcemi při skládání

Úloha II.4 ... Kontrola rychlosti

5 bodů; průměr 0,96; řešilo 45 studentů

Aby pozorovatel zjistil rychlost rakety Vítěz, střílel do rakety světelným paprskem o vlnové délce 510 nm. K pozorovateli se vrátil světelný paprsek o vlnové délce o 0,21 nm kratší než původní vlnová délka.

Zjistěte rychlost rakety, víte-li, že rychlost světla je $3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Nejprve si popíšeme situaci. Začátek vlny narazí do lodi, loď pokračuje ve své dráze a pak do ní narazí konec vlny. Časový rozdíl mezi nárazy si označíme t . Zároveň se začátek vlny po tomto čas t již vzdaloval zpět od lodi. Odražená vlnová délka λ_2 je rovna součtu vzdálenosti s_1 , kterou musel urazit konec vlny od nárazu začátku vlny po svůj náraz, a vzdálenosti s_2 , kterou urazil začátek vlny od odrazu zpět po čas t . Za kladný směr rychlosti lodi v_R bereme pohyb lodi směrem od pozorovatele:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\lambda_1}{c - v_R}, \\ \lambda_2 &= s_1 + s_2, \\ s_1 &= tc, \\ s_2 &= tv_R, \\ \lambda_2 &= tc + tv_R, \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda_1(v_R + c)}{c - v_R}, \\ v_R &= \frac{c(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 + \lambda_1}. \end{aligned}$$

Po dosazení zadaných hodnot nám vyjde

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot (-0,21 \text{ nm})}{2 \cdot 510 \text{ nm} - 0,21 \text{ nm}}, \\ v_R &\doteq -62\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Jelikož nám vyšla rychlost rakety záporná, raketa se pohybuje směrem k pozorovateli.

Raketa Vítěz letí směrem k pozorovateli rychlostí velkou $|v_R| = 62\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Komentář k došlým řešením

Mnoho z vás si našlo vzoreček pro změnu vlnové délky při pohybujícím se zdroji. Tato situace se od naší liší tím, že raketa nevysílá, ale odráží signál. Takže vlna letí nejen od rakety k pozorovateli, ale nejdříve i od pozorovatele k raketě.

Alžběta Nečadová
bjetka@fykos.cz

Úloha II.C ... Seriálová

4 body; průměr 2,62; řešilo 42 studentů

a) Vypočítejte vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} sečtením a odečtením vektorů $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ a určete velikost úhlu, který svírají vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} .

Úloha II.3 . . . Raketa Vítěz

3 body; průměr 2,03; řešilo 71 studentů
 Předpokládáme, že raketa Vítěz letí k Zemi po přímce, která spojuje střed Zeme a Měsíce. Zjistěte, v jaké vzdálenosti od povrchu Zeme se nachází bod, kde gravitační síla Zeme působí na raketu bude vyrovnána gravitační silou Měsíce.
 Hmotnost Zeme je $5,97 \cdot 10^{24}$ kg a hmotnost Měsíce je $7,35 \cdot 10^{22}$ kg.

Raketa Vítěz se pohybuje jak v radiálním gravitačním poli Zeme, tak Měsíce. V radiálním poli platí Newtonův gravitační zákon: „Dva hmotné body na sebe působí vzájemně gravitačními silami, které jsou stejně velké a opačně orientované. Jejich velikost je přímo úměrná součinu hmotností těchto bodů a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti.“
 Aby výsledná síla působící na raketu byla nulová, musí platit

$$F_{gZ} = F_{gM}, \quad \frac{M_Z m}{r_2^2} = \frac{M_M m}{r_1^2},$$

kde M_Z je hmotnost Zeme, M_M je hmotnost Měsíce, m je hmotnost rakety, r_1 je gravitační konstanta a r_1, r_2 jsou vzdálenosti rakety od středu Zeme resp. Měsíce.

$$\frac{M_Z}{M_M} = \frac{r_2^2}{r_1^2}, \quad \frac{\sqrt{M_Z}}{\sqrt{M_M}} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Za r_2 můžeme dosadit $r - r_1$, kde r je střední vzdálenost středů Zeme a Měsíce ($r = 384\,403$ km)

$$\frac{\sqrt{M_Z}}{\sqrt{M_M}} = \frac{r_1}{r - r_1}, \quad r_1 = \frac{r \sqrt{M_Z}}{r \sqrt{M_Z} + \sqrt{M_M}}.$$

Po číselném dosazení dostaneme přibližně $r_1 = 346\,011$ km a když od této hodnoty odečteme zemský poloměr ($R_Z = 6\,378$ km) dostaneme hledanou vzdálenost rakety od zemského povrchu, která je $339\,633$ km.

Poznámky k doslým řešením

- Úlohu šlo velmi podobně řešit přes intenzitu radiálního gravitačního pole.
- Vzdálenost Zeme a Měsíce není konstantní a pohybuje se od $356\,410$ km, kdy je Měsíc Zemi nejbližší (v perigeu), po $406\,697$ km, kdy je Měsíc nejdále (v apogeu). Běžně se používá střední vzdálenost, která je oměch $384\,403$ km.
- Pozor na rozdílly mezi tíhovou a gravitační silou! Nemala část z vás si je stále plete.

Lukáš Fúsek
 lukas@fyzkos.cz

Řešení II. série

Vzorové řešení experimentální úlohy se nevidět objeví na našem webu a bude vytištěno v první brožurce. Za prodlení se omlouváme.

Úloha II.1 . . . Von Dresden nach Wien 3 body; průměr 2,68; řešilo 87 studentů
 Centra měst *Draždan* a *Vidně* jsou od sebe vzdálena zhruba $d = 370$ km vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy šli autem.
 Nápověda Aby byla tato úloha jednodušší, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme použít pro malé úhly aproximovat (tedy přibližit) jako

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \tan \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3},$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsazený v nějaké goniometrické funkci.

Vzdálenost měst s_p po povrchu lze vyjádřit pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku

$$s_p = R_Z \alpha,$$

kde R_Z je poloměr Zeme a α je úhel, který vytínají spojnice měst se středem Zeme. Z tohoto vztahu můžeme snadno vyjádřit

$$\alpha = \frac{R_Z}{s_p}.$$

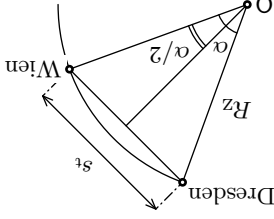
Vzdálenost měst s_t při cestě hypotetickým tunelem lze za znalosti úhlu α vyjádřit jako (viz obrázek 5)

$$s_t = 2R_Z \sin \frac{\alpha}{2}.$$

(1)

Pro zjednodušení můžeme pro malé úhly aproximovat sinus prvními dvěma členy Taylorovy řady (v. nápovědu), tedy

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}.$$



Obr. 5: Tunnel z *Draždan* do *Vidně*

Po dosazení této aproximace do vztahu (1) vychází

$$s_t \approx 2R_z \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} \right) = R_z \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{24} \right) = R_z \left(\frac{s_p}{R_z} - \frac{s_p^3}{24R_z^3} \right) = s_p - \frac{s_p^3}{24R_z^2},$$

a tedy

$$\Delta s = s_p - s_t = \frac{s_p^3}{24R_z^2}.$$

Po dosazení $s_p = 370$ km a $R_z = 6378$ km vychází $\Delta s = 52$ m.

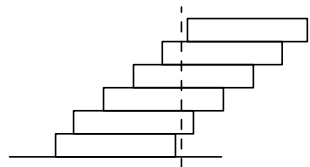
Odhadnout dobu cesty mezi těmito dvěma městy je záludné, neboť je potřeba znát průměrnou rychlost jízdy. Co ale můžeme snadno vyjádřit, je relativní změna doby jízdy při jízdě tunelem za předpokladu, že průměrná rychlost jízdy na povrchu je stejná jako průměrná rychlost jízdy tunelem

$$\frac{\Delta t}{t_p} = \frac{\frac{\Delta s}{v}}{\frac{s_p}{v}} = \frac{\Delta s}{s_p}.$$

Po dosazení vychází $\Delta t/t_p = 0,014\%$, což je naprosto zanedbatelná hodnota. Pokud by průměrná rychlost činila např. $v = 100$ km·h⁻¹, pak by rozdíl doby jízdy při cestě po povrchu a tunelem činil zhruba $\Delta t = 1,9$ s, což při celkové době jízdy 3 hodiny 42 minut nehraje opravdu žádnou roli.

Nakonec můžeme srovnat vzdálenost měst při cestě tunelem se vzdáleností měst při cestě po silnici. Podle webu <http://mapy.cz> je nejkratší cesta z Drážďan do Vídně dlouhá 438 km. Zjišťujeme tedy, že „klikatost“ silnice má na délku cesty mnohem větší vliv než to, že je Země kulatá.

Zdeněk Jakub
zdenekjakub@fykos.cz



Úloha II.2 ... Zítřka se začnu učit
průměr 0,79; řešilo 67 studentů

3 body;

Během minulého zkouškového období shledal matfyzák Pepa, že už na stole nemá dostatek místa, a tak se rozhodl, že si pracovní místo přeorganizuje. Jako nevhodnější se mu zdálo přesunout knihu Diferenciální počet I mimo stůl, ale tak, aby tato kniha byla stále v dosahu.

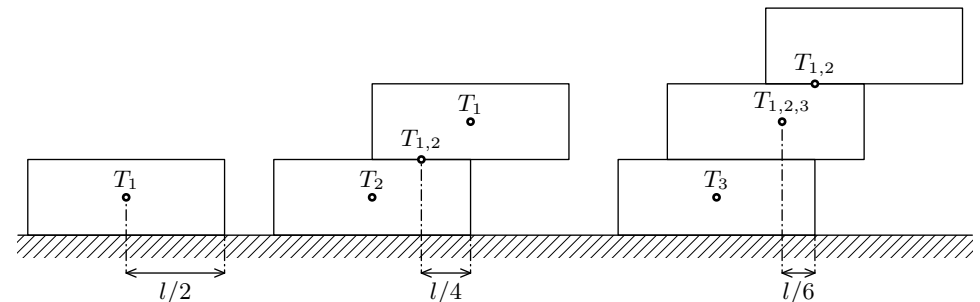
Ovšem ani nejbližší skříňka nebyla dostatečně blízko, aby na knihu dosáhl. Sesbíral proto po pokoji všechny nepotřebné učebnice a vyskládal z nich na skříňku sloupec knih tak, že každou další knihu vysunul o kousek blíže stolu než tu předchozí, ale zároveň ne moc, aby se sloup knih nezřítíl. Kniha poskládal tak, že pod vrchním Diferenciálním počtem I nebyl ani kousek nejspodnější knihy. Na takto odsunutou knihu už Pepa v pohodě dosáhl. Kolik nejméně knih je potřeba, aby se dala taková věž z knih postavit, pokud mají všechny použité knihy stejné rozměry (a hmotnosti)?

Najdôležitejšia vec pri riešení príkladu je správne si prečítať zadanie. Písali sme, že Pepa knižky ukladá tak, aby sa nezrútili. To by nám mohlo napovedať, že nejaké riešenie existuje a snažiť sa ho nájsť.

Veľa z vás totiž prehlásilo, že veža s rovnomerne vysunutými knižkami spadne. To je síce správne, ale rovnomerné vysunutie nie je jediná možnosť!

Musíme prísť na to, ako veľmi môžeme jednotlivé knihy vysúvať⁴. Hneď si všimneme, že vrchná kniha musí mať svoje ťažisko položené na knihe pod ňou. Aby bola splnená táto podmienka, tak vrchná kniha môže byť vysunutá maximálne o polovicu svojej šírky⁵. Toto však musí platiť aj pre vrchné 2 knihy – ich spoločné ťažisko musí ležať na knihe pod nimi. Podobná podmienka platí aj pre 3, 4, 5 kníh a tak ďalej, až kým sa postupne neprebojujeme k spodku veže. Pri ukladaní takýmto spôsobom bude ľubovoľná časť veže stabilná, a teda stabilná bude aj celá veža.

Podme vypočítať jednotlivé vysunutia. Knižky začneme ukladať pod seba od najvrchnejšej a budeme ich vysúvať podľa obrázka. Ako sme povedali, prvú vysunieme o $l/2$ jej šírky. Spočítajme spoločné ťažisko prvej a druhej knihy: ak predpokladáme, že všetky knihy sú rovnaké, tak ťažisko bude v strede – teda vo vzdialenosti $l/4$ od pravého okraja druhej knihy:



Obr. 6: Náčrtok stavania vrchných troch kníh

Tretiu knižku podložíme tak, aby ťažisko $T_{1,2}$ bolo presne nad pravým okrajom tretej knihy. Znova spočítajme ťažisko týchto 3 kníh. Je logické, že bude ležať niekde medzi ťažiskom 3. knihy T_3 a spoločným ťažiskom prvých 2 kníh $T_{1,2}$. Keďže $T_{1,2}$ je nad okrajom 3. knihy, vzdialenosť $T_{1,2}T_3$ bude $l/2$. Ak si uvedomíme, že bod $T_{1,2}$ zastupuje 2 knižky a T_3 jednu, je rozumné očakávať, že ťažisko všetkých 3 kníh $T_{1,2,3}$ bude dvakrát bližšie k $T_{1,2}$. Vzdialenosť $l/2$ si teda rozdelíme na tretiny a hneď vidíme, že spoločné ťažisko 3 kníh sa nachádza vo vzdialenosti $l/6$ od pravého okraja tretej knihy.

Ďalej pokračujeme rovnako. Podložíme štvrtú knihu a urobíme celý proces dookola. Znova budeme deliť vzdialenosť $l/2$ medzi ťažiskom prvých 3 kníh $T_{1,2,3}$ a ťažiskom štvrtej knihy, tentokrát ale na 4 časti. Podobným postupom dospejeme, že spoločné ťažisko 4 kníh je vzdialené o $l/8$. Všimnime si, že sme postupne dostali výsledky $l/2, l/4, l/6$ a $l/8$. Nemusíme viac počítať: vidíme, že ďalšiu knihu môžeme vysunúť o $l/10$, potom o $l/12$ atď.

Lahko overíme, že $l/2 + l/4 + l/6 + l/8 = 25l/24$, čo znamená, že Pepovi stačí 5 knižiek aby dosiahol svoj sen.⁶

Patrik Švančara
patrik@fykos.cz

⁴Keďže chceme nájsť najmenší počet kníh.

⁵Vtedy bude jej ťažisko položené presne na okraji knihy pod ňou.

⁶Kto nevidí, prečo 5 kníh, keď spočítavame iba 4 zlomky, nech si to nakreslí :-).