Výfučtení: Goniometrické a cyklometrické funkce

Trocha historie

Bavíme-li se o goniometrických funkcích (a v souvislosti s nimi i o funkcích cyklometrických) musíme si uvědomit, že v průběhu času byly vnímány velmi odlišně. Věnujme tedy na začátku tohoto povídání pár řádků historii jejich vzniku a jak se postupně vyvíjely naše poznatky o nich.

V dnešní době definujeme rovinný úhel jako část roviny omezenou dvěma polopřímkami se společným počátkem. Ovšem zrod tohoto pojmu je spojen s dělením kruhu. Staří Babyloňané dělili kruh na 360 shodných částí (výsečí), které nazývali stupně, a dále pak každý stupeň dělili na dalších 60 částí nazývaných minuty. Toto dělení od nich převzali Řekové, a ačkoliv je šedesátková soustava zastaralá, přetrvala dodnes. Do této doby byl vrcholem práce s nimi poznatek o podobnosti trojúhelníků.

Další vývoj na poli trigonometrie byl podnícen astronomií. Starořecký astronom Hipparchos z Nikaie (180–125 př. n. l.) potřeboval pro své výpočty tabulky trigonometrických poměrů, které však do jeho doby neexistovaly. Vzal tedy v úvahu libovolný trojúhelník, jemuž opsal kružnici, čímž se každá strana stala tětivou této kružnice a jako takové jí příslušel středový úhel. K výpočtu velikostí různých prvků v trojúhelníku bylo tedy třeba stanovit délku tětivy příslušné danému středovému úhlu. Tento úkon (rozvinutý Klaudiem Ptolemaiem) byl hlavním objektem zájmu starověkých učenců.

Po rozpadu řecké společnosti se vývoj přesunul do Indie, kde byly zavedeny mnohem přesnější definice a rozšířeny znalosti o goniometrických funkcích. Indické vědomosti byly následně přeloženy a zdokonaleny v Arábii, kde už používali všech 6 goniometrických funkcí spolu s jejich velice přesnými a podrobnými tabulkami. Z této doby existuje označení sinu – latinsky *záliv, záhyb*. Označení vzniklo nesprávným překladem právě z děl arabských matematiků. Teprve až v 15. stol. se vývoj přesunul do Evropy. Až v této době se začalo měnit dosavadní pohlížení na goniometrii jakožto doplněk astronomie a dokonce až na konci 16. stol. byly tyto funkce poprvé definovány přes pravoúhlé trojúhelníky.

Poslední hlubokou změnu v chápání goniometrických funkcí umožnilo až dílo jednoho z nejslavnějších matematiků všech dob Leonarda Eulera v roce 1748. Teprve on přetvořil do té doby pouze numericky vyčíslované a tabulizované trigonometrické hodnoty ve funkce, které dokázal vyjádřit ve formě nekonečného součtu (chápejte tak, že čím více členů sečteme, tím přesnější dostaneme výsledek) tak, aby se dala hodnota funkce v bodě jednoduše vyčíslit. Díky tomuto zavedení už Eulera neomezovala nutnost spojovat hodnoty sinu, cosinu atd. s pravoúhlým trojúhelníkem a oprostil se tak od tisíciletého pohledu na tyto funkce jakožto na úsečky o určité délce. Od dob Eulera na ně pohlížíme jako na *čísla*.

S touto hlubokou změnou vnímání bychom měli na chvíli odbočit k dnešní terminologii. Česká matematická terminologie je totiž jedna z těch, ve kterých se ujal návrh významného matematika, fyzika a didaktika Felixe Kleina (1849–1925), který na počátku 20. století prosazoval její změnu. Ve většině ostatních jazyků narazíte pouze na termín trigonometrické funkce, či trigonometrie. Toto označení však poukazuje pouze na starší chápání významu těchto funkcí o němž je psáno výše – goniometrie pochází z řečtiny a znamená měření úhlů, trigon se pak překládá jako trojúhelník (dnes už nejsou goniometrické funkce omezovány pouze na trojúhelníky, případně úsečky).

Proto v češtině narážíme hlavně na goniometrické funkce a odlišujeme trigonometrii jako podobor goniometrie zabývající se původní aplikací goniometrických funkcí na geometrii trojúhelníků, zatímco v jiných jazycích přetrvalo jen jedno zavádějící označení…

Úhel

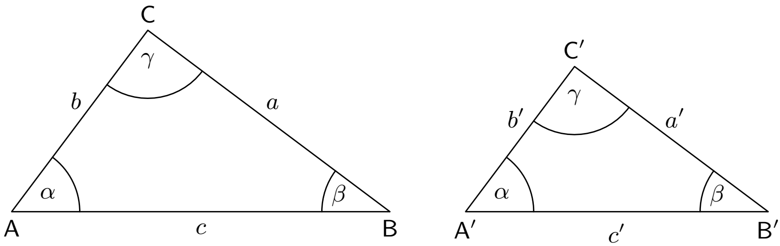
Definice úhlu popsána výše nám říká, že úhel je vlastně částí roviny. Musíme tedy rozlišovat mezi termíny úhel a velikost úhlu, s níž pracují goniometrické funkce. Proto se budeme bavit o tom, jak zapsat velikost úhlu.

Dnes se můžete setkat se dvěma různými jednotkami. Díky novověkému pohledu na goniometrické funkce a jejich užití ve vyšší matematice a ve fyzice je přirozenější úhly vyjadřovat v obloukové míře s jednotkou radián namísto stupňové. Jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Z této definice vyplývá, že plný úhel má 2π radiánů ($1\,\mathrm{rad} \doteq 57{,}3^\circ \doteq 57^\circ 17' 45''$). Převody mezi stupni a radiány hledejte v tabulce níže. Samotné slovo radián navrhl v roce 1871 Jameson Thomson.

Zpravidla se však z dobrých důvodů označení radián neuvádí a ztotožňuje se s jedničkou, takže například $2\pi\,\mathrm{rad} = 2\pi = 360^\circ$.

Zavedení trigonometrických funkcí

Definovat goniometrické funkce můžeme hned několika způsoby, my si však zatím ukážeme ten nejjednodušší – v pravoúhlém trojúhelníku.



Obr. 1: Podobné trojúhelníky

Na obrázku vidíme dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a A′B′C′ se shodným úhlem α. Jsou tedy *podobné* podle věty *uu*, z čehož plynou rovnosti následujících poměrů

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}\,, \qquad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}\,, \qquad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}\,,$$
$$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\,, \qquad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}\,, \qquad \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}\,.$$

Vidíme, že tyto poměry jsou vždy kladné a u všech podobných pravoúhlých trojúhelníků shodné, resp. nezávisí na délkách jejich stran, ale jen a pouze na velikosti vnitřního úhlu α k němuž tyto poměry vztahujeme. Těmto poměrům říkáme sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans[1] úhlu α

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}\,, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}\,,$$
$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}\,, \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}\,, \qquad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{c}{a}\,.$$

[1] V dnešní době se sekans a kosekans mimo anglosaský svět příliš nepoužívají, proto se těmito funkcemi nebudeme v našem textu dále zabývat.

Musíme si vždy uvědomit, ke kterému úhlu dané funkce vztahujeme. Například sinus úhlu β bude poměr stran b a c, ne a a b jako pro úhel α!

Vzhledem k tomu, že jsme zavedli pouze trigonomotrické funkce, v trojúhelníku, můžeme dosazovat úhly v rozmezí $(0°; 90°) \Leftrightarrow (0; \pi/2)$.

Tabulka základních úhlů

Tabulka 1: Důležité hodnoty goniometrických funkcí

α	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	neexistuje

K čemu je to vlastně dobré?

Ukážeme si nejjednodušší použití na následujícím příkladu: Určete délky všech stran pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, víte-li, že při běžném značení (proti vrcholu A je strana a a úhel při něm je α, stejným způsobem i pro ostatní vrcholy, strany a úhly) $\beta = 60\,°$ a $|AB| = 6$. Z definice sinu platí

$$\sin\beta = \frac{|AC|}{|AB|}\,,$$
$$|AC| = |AB|\sin\beta\,,$$
$$|AC| = 6\cdot\sin 60° = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,.$$

Zbývající stranu můžeme dopočítat pomocí Pythagorovy věty, my však použijeme opět trigonometrii.

Protože

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°\,,$$

tak

$$\alpha = 180° - \gamma - \beta = 180° - 90° - 60° = 30°\,,$$

Pro sinus úhlu α platí

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|}\,,$$
$$|BC| = |AB|\sin\alpha\,,$$
$$|BC| = 6\cdot\sin 30^\circ = 6\cdot\frac{1}{2} = 3\,.$$

Trojúhelník ABC má tedy strany délky 6; 3 a $3\sqrt{3}$.

Rozšíření na obecný trojúhelník

Trigonometrické funkce se dají používat kromě pravoúhlého i v obecném trojúhelníku. Toto zobecnění s sebou přináší nutnost rozšíření definičního oboru i na tupé úhly (tedy na interval $[0;\pi]$).

Abychom mohli dopočítávat délky stran v libovolném trojúhelníku, budeme potřebovat znát nové trigonometrické identity, jimiž jsou sinová a kosinová věta. Při běžném značení platí

- sinová věta
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,,\qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,,\qquad \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,,$$
- kosinová věta
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

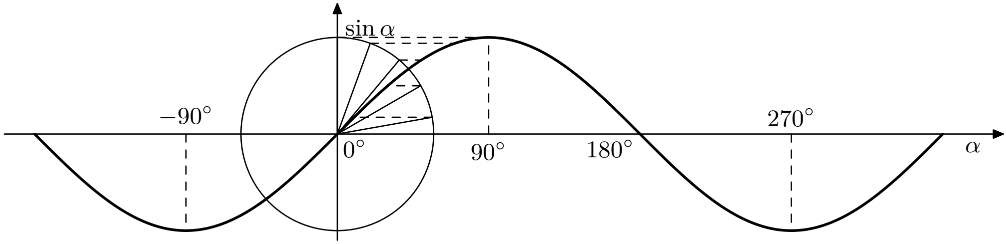
Všimněme si, že jestliže bude trojúhleník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, přechází třetí rovnice do tvaru Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ (protože $\cos(\pi/2) = 0$).

Zavedení goniometrických funkcí

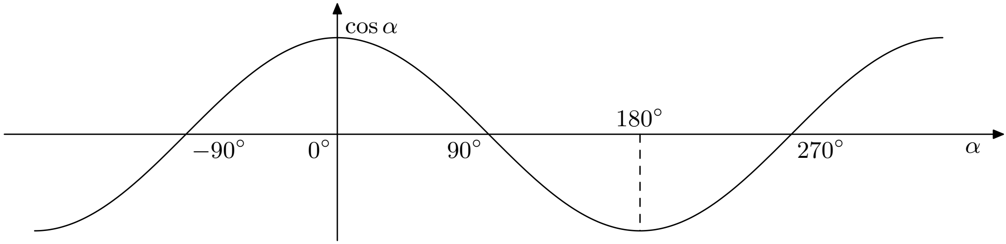
Jestliže definujeme goniometrické funkce pomocí tzv. jednotkové kružnice[2], můžeme dále rozšířit definiční obor těchto funkcí[3]. Takto definované funkce jedné proměnné nacházejí široké uplatnění napříč matematikou, fyzikou a jinými obory. Na dalších řádcích popíšeme některé vlastnosti jednotlivých funkcí na rozšířeném definičním oboru:

Sinus a kosinus tyto dvě funkce mají velmi podobné vlastnosti, do obou můžeme dosadit jakékoli číslo, obě vám na výstupu dají číslo od -1 do 1. Obě jsou to periodické funkce s periodou 2π. Pokud tedy do funkcí dosadíme úhel o libolný násobek 2π větší, dostaneme to samé číslo. Platí tedy pro ně vztahy $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ a $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, k je libovolné celé číslo. Sinus je lichá funkce, symbolicky tedy $\sin(-x) = -\sin(x)$, zatímco kosinus je funkce sudá, tedy $\cos(-x) = \cos(x)$.

Tangens je definovaný jako podíl sinu a kosinu. V matematice nemůžeme dělit nulou, proto tangens existuje jenom v bodech x, pro které $\cos(x) \neq 0$. Nemůžeme tedy dosazovat úhly $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ atd. Funkce na výstupu dává všechna reálná čísla, tedy i větší jako 1 nebo menší



Obr. 2: Sinusoida



Obr. 3: Kosinusoida

jako -1. Jedná se o lichou periodickou funkci (perioda je π): $\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}(x)$, $\mathrm{tg}\,(x + k\pi) = \mathrm{tg}(x)$.

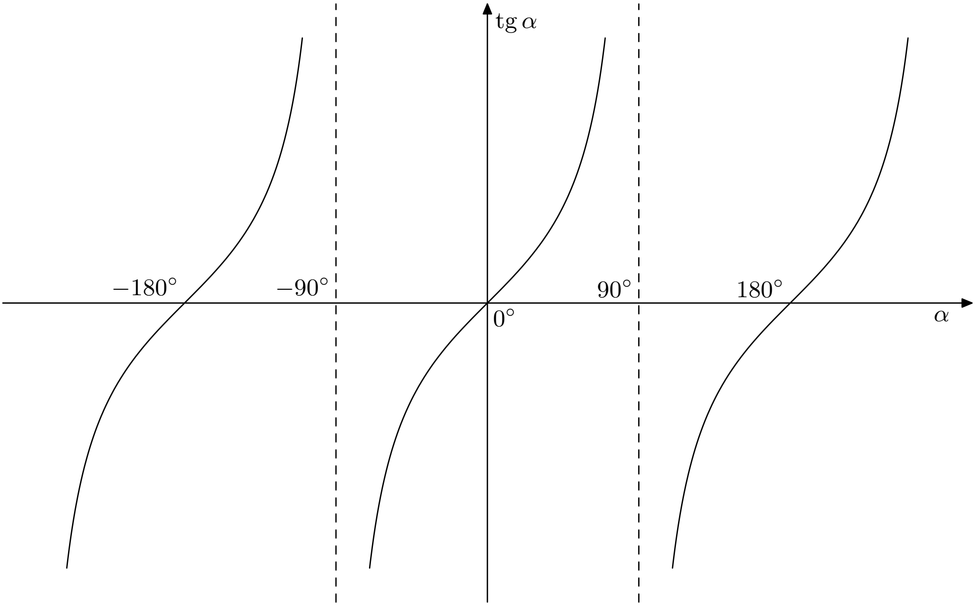
Kotangens je definovaný jako podíl kosinu a sinu, proto musí platit $\sin(x) \neq 0$. Můžeme dosazovat tedy cokoliv s výjimmkou všech násobků úhlu π. Stejně jako tangens nám dá jakékoliv číslo a je to také lichá a periodická funkce: $\mathrm{cotg}(-x) = -\,\mathrm{cotg}(x)$ a $\mathrm{cotg}\,(x + k\pi) = \mathrm{cotg}(x)$.

Cyklometrické funkce

Dosud jsme řešili pouze problém hledání funkční hodnoty pro daný úhel, například $\sin(30^\circ) = ?$. Co když ale máme danou pouze onu funkční hodnotu a máme zjistit, kterému úhlu náleží – kupříkladu $\sin(x) = 0{,}5$; $x = ?$. K tomuto účelu sloužejí právě cyklometrické funkce, které jsou jen jiným označením pro inverzní funkce ke goniometrickým funkcím (tzn., že do nich „hodíme“ jinak funkční hodnotu a „vypadne“ z ní hodnota úhlu). Slovní označení jsou arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg). Na kalkulačkách se z důvodu úspory místa setkáme spíše s označením $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ apod., nepleťte si toto označení s mocninami, nejedná se o převrácené hodnoty goniometrických funkcí.

Jedné hodnotě sinu a kosinu připadá nekonečně mnoho úhlů, přičemž úhel, který patří do intervalu $[0^\circ; 360^\circ] = [0; 2\pi]$ nazýváme úhlem základním.

[2] Pro zájemce `http://cs.wikipedia.org/wiki/Jednotková_kružnice`
[3] Definiční obor je množina všech čísel, které můžeme do funkce dosadit.



Obr. 4: Tangenta

Základní goniometrické vzorce

Při různých výpočtech se jistě setkáte s nutností zjednodušit nějaký hrůzostrašně vypadající výraz. K tomu vám jistě přijdou vhod následující identity.

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\,,\\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,. \end{aligned}$$

Pokud vás budou zajímat další vztahy, třeba pro tangens, neváhejte a najděte si je.

Fyzikální aplikace

Goniometrické vzorce nachází uplatnění, jak již bylo řečeno, napříč celou matematikou, fyzikou a technickými obory. Při řešení tohoto semináře se jistě setkáte s těmito funkcemi při skládání sil (obecně při práci s vektory), zmiňme kupříkladu rozklad sil na nakloněné rovině atd. Goniometrické funkce se používají při popisu kmitavého pohybu, elektromegnetického vlnění… Jejich použití je nesmírně široké.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.