Úloha IV.C ... Goniometrická

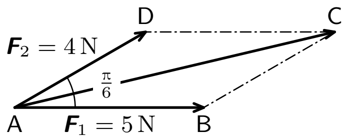
5 bodů; průměr 3,47; řešilo 38 studentů

a) *Na Higgsův boson (částice) působí dvě síly, jejichž vektory svírají úhel* $\pi/6$. *První síla je velká* $5\,\mathrm{N}$, *druhá je velká* $4\,\mathrm{N}$ *a je téže orientace. Jaká je velikost výsledné síly?*
Pomůcka *Nakreslete si obrázek.*

b) *V historické části textu jsme se dozvěděli, že Hipparchos odvodil vztah pro výpočet délky tětivy příslušné (tedy v závislosti na) danému středovému úhlu. Odvoďte jej také.*

c) *Odvoďte pomocí součtových vzorců vzorce pro* $\sin(2\alpha)$ *a* $\cos(2\alpha)$.

a) Výslednici obou sil určíme pomocí metody doplnění na rovnoběžník, jak znázorňuje obr. 1. Označme si vzniklý rovnoběžník jako ABCD, přičemž Higgsův boson se bude nacházet ve vrcholu A, vektor o velikosti $5\,\mathrm{N}$ bude představovat stranu AB, vektor o velikosti $4\,\mathrm{N}$ zase stranu AD. Úhel $|\sphericalangle\mathsf{BAD}|$ má velikost $\pi/6$ (víme ze zadání). Platí, že velikost výslednice se bude rovnat délce úsečky AC.



Obr. 1: Rovnoběžník pro skládaní dvou sil

Z vlastností rovnoběžníků plynou následující rovnosti délek stran

$$|\mathsf{AB}| = |\mathsf{CD}|\,,$$
$$|\mathsf{BC}| = |\mathsf{AD}|\,.$$

Nyní se podívejme na úhly v takovémto rovnoběžníku. Víme, že $|\sphericalangle\mathsf{CAD}| + |\sphericalangle\mathsf{BAC}| = \pi/6$. Zároveň však díky rovnoběžnosti platí rovnost střídavých úhlů

$$|\sphericalangle\mathsf{CAD}| = |\sphericalangle\mathsf{ACB}|\,,$$
$$|\sphericalangle\mathsf{BAC}| = |\sphericalangle\mathsf{ACD}|\,.$$

Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABC a ACD jsou shodné podle věty např. SSU,[1] je jedno, z kterého budeme určovat délku strany AC, která představuje hledanou velikost výslednice. Bavme se tedy o trojúhelníku ABC. Vzhledem k výše napsaným vztahům platí, že součet úhlů při vrcholu C a A je roven $\pi/6$.[2] Nyní tedy známe velikost úhlu při vrcholu B, což je $5\pi/6$, a jsme schopni pomocí kosinové věty ze seriálu dopočítat délku strany AC. Dosazením dostaneme

$$|\mathsf{AC}|^2 = |\mathsf{AB}|^2 + |\mathsf{BC}|^2 - 2|\mathsf{AB}||\mathsf{BC}|\cos|\sphericalangle\mathsf{CBA}|\,,$$
$$|\mathsf{AC}|^2 = (5\,\mathrm{N})^2 + (4\,\mathrm{N})^2 - 2\cdot 5\,\mathrm{N}\cdot 4\,\mathrm{N}\cdot\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\,.$$

[1] Věta říká: „Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu proti delší z nich, jsou shodné.“
[2] Uvědomme si, že nás nezajímají jejich jednotlivé velikosti, ale stačí nám pouze znalost jejich součtu.

Dosazením do kalkulačky zjistíme, že

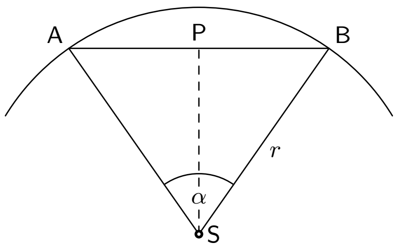
$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

tedy

$$|\mathsf{AC}|^2 = 41\,\mathrm{N}^2 + \sqrt{3}\cdot 20\,\mathrm{N}^2\,.$$

Odmocněním dostáváme, že $|\mathsf{AC}| \doteq 8{,}7\,\mathrm{N}$.

b) Každou tětivu kružnice o poloměru r můžeme doplnit na rovnoramenný trojúhelník o rameni r, jak je znázorněno na obr. 2. Označme si krajní body tětivy jako A a B. Máme dva způsoby, jak vyjádřit délku úsečky AB v závislosti na r a úhlu α.



Obr. 2: K odvození délky tětivy

Můžeme jít stejnou cestou jako v minulém problému a použít kosinovu větu, anebo využít vlastnosti rovnoramenných trojúhelníků. V prvním případě dostaneme dosazením do kosinové věty vztah

$$|\mathsf{AB}|^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos\alpha\,,$$
$$|\mathsf{AB}|^2 = r^2\left(2 - 2\cos\alpha\right)\,,$$
$$|\mathsf{AB}| = r\sqrt{2\left(1-\cos\alpha\right)}\,.$$

Druhý způsob využívá vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku říkající, že výška a těžnice v něm splývají v jedno. Označme si patu výšky z bodu S jako P. Dostaneme tak dva trojúhelníky SBP a SAP. Díky splynutí těžnice s výškou platí, že $|\mathsf{BP}| = |\mathsf{AP}|$ a zároveň $|\sphericalangle\mathsf{SPA}| = |\sphericalangle\mathsf{SPB}| = \pi/2$ – trojúhelníky jsou tedy shodné například opět podle věty SSU. Oba mají úhel při vrcholu S o velikosti $\alpha/2$. Z definice sinu v pravoúhlém trojúhelníku platí

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|\mathsf{BP}|}{r}\,,$$

respektive

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|\mathsf{AP}|}{r}\,.$$

Když nyní vyjádříme AP a BP a tyto dva výrazy sečteme, dostaneme délku úsečky AB

$$|\mathsf{AB}| = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Určitě se podivíte, že při dvou různých cestách dostáváme dva různé výsledky, ale zamyslete se nad nimi. Zkuste dokázat, že tyto dva výrazy jsou si navzájem ekvivalentní.
Nápověda K důkazu se může hodit, krom vztahů uvedených v seriálu, i vztah

$$\cos\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\left(2x\right)\right] ,$$

který uvádíme bez důkazu.

c) Podívejme se, co se stane, jestliže do součtových vzorců

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,,$$

dosadíme za β kladný úhel α

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\,,$$
$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,.$$

Tyto vzorečky je dobré si do budoucnosti pamatovat, budou se vám ještě mnohokrát hodit!

Tomáš Kremel
`tomask@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.