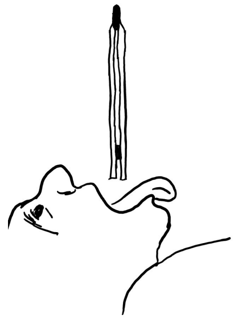
Úloha IV.4 ... Rozbitý teploměr

4 body; průměr 3,03; řešilo 34 studentů

Při posledním experimentu v laboratoři se matfyzákům podařilo náhodou rozbít velký rtuťový teploměr. V teploměru zůstala kapička rtuti dlouhá $h = 10\,\mathrm{cm}$, *která v něm uzavírá vzduch. Když je směrem k zemi otočený rozbitý konec teploměru, vzduchová bublina je dlouhá* $l_1 = 21{,}5\,\mathrm{cm}$. *A když k zemi směruje zatavený konec teploměru, tíha rtuti vzduch v něm stlačí na délku* $l_2 = 16{,}5\,\mathrm{cm}$. *Z těchto údajů vypočtěte atmosferický tlak. Hustota rtuti je* $\varrho = 13\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a tíhové zrychlení je* $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Zamyslime sa nad silami, ktoré v našom probléme vystupujú a pôsobia na ortuťový stĺpec. V prvom prípade, keď je rozbitý koniec otočený k zemi, na ortuť pôsobí tiažová sila smerom kolmo dole. Tým istým smerom na ňu pôsobí aj tlaková sila od vzduchovej bubliny. Naopak, atmosférický tlak pôsobí na spodnú časť stĺpca proti tiaži ortuti, a teda smerom kolmo nahor. Kedže ortuť je v pokoji, výsledná sila musí byť nulová. Označme

- $\boldsymbol{F}_1$ tlakovú silu uviaznutej bubliny,
- $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Hg}}$ tiažovú silu otuťového stĺpca,
- $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}}$ tlakovú silu pochádzajúcu od atmosférického tlaku.

Za kladný smer budeme odteraz považovať silu idúcu kolmo hore, záporné sily budú smerovať kolmo nadol. Rovnosť síl bude teda vyzerať

$$-F_1 - F_{\mathrm{Hg}} + F_{\mathrm{a}} = 0\,.$$

Ak nahradíme tlakové sily súčinom plochy a tlaku, potom môžeme rovnicu upraviť do tvaru

$$-p_1 S - p_{\mathrm{Hg}} S + p_{\mathrm{a}} S = 0\,,$$

kde vidíme, že môžeme vykrátiť S. Teda dostávame

$$\begin{aligned} -p_1 - p_{\mathrm{Hg}} + p_{\mathrm{a}} &= 0\,,\\ p_1 + p_{\mathrm{Hg}} &= p_{\mathrm{a}}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

V druhom prípade, keď je rozbitý koniec otočený smerom nahor, na ortuť pôsobí tiažová sila stále smerom nadol. Súčasne pôsobí na vrchnú časť ortuti rovnakým smerom tlaková sila od atmosféry. No a v opačnom smere pôsobí tlaková sila od vzduchovej bubliny, ktorú označíme ako $\boldsymbol{F}_2$. Kedže je celá sústava opäť v pokoji, výsledná sila pôsobiaca na sústavu je opäť nulová. Pre druhý prípad teda platí podobný vzťah

$$\begin{aligned} -F_2 - F_{\mathrm{Hg}} + F_{\mathrm{a}} &= 0\,,\\ -p_2 S + p_{\mathrm{Hg}} S + p_{\mathrm{a}} S &= 0\,,\\ -p_2 + p_{\mathrm{Hg}} + p_{\mathrm{a}} &= 0\,,\\ p_2 &= p_{\mathrm{Hg}} + p_{\mathrm{a}}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ďalej vieme, že ortuť tvorí stĺpec o výške $h = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Môžeme si teda vyjadriť hydrostatický tlak p_{Hg} podľa známeho vzorca

$$p_{\mathrm{Hg}} = h\varrho g\,. \tag{3}$$

Teraz sa zamerajme na vzduchovú bublinu. Vieme, že žiaden vzduch do bubliny neprichádza ani z nej neuniká. Môžeme teda o tomto deji povedať, že je izotermický. Pretože počas otáčania teplomeru žiadny vzduch neprichádza ani neuniká z bubliny uzavretej v teplomere. Zároveň sa zmena nedeje tak rýchlo aby sa plyn zahrial a teda sa zmenila teplota.

Potom platí $p_1V_1 = p_2V_2 = \text{konst}$. Namiesto objemov môžeme dosadiť $V_1 = S_\mathrm{p}l_1$ a $V_2 = S_\mathrm{p}l_2$, teda

$$p_1 l_1 = p_2 l_2 \,,$$
$$p_1 = \frac{p_2 l_2}{l_1} \,.$$

Dostávame vzťah pre p_1, ktorý si dosadíme do rovnice (1)

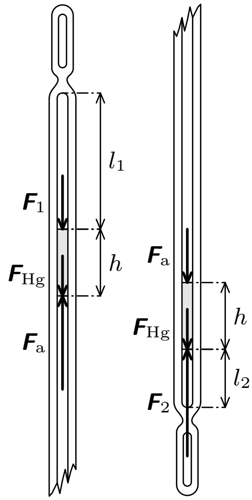
$$p_1 + p_\mathrm{Hg} = p_\mathrm{a} \,,$$
$$\frac{p_2 l_2}{l_1} + p_\mathrm{Hg} = p_\mathrm{a} \,,$$

Teraz vynásobíme rovnicu l_1

$$p_2 l_2 = p_a l_1 - p_\mathrm{Hg} l_1 \,,$$

Teraz vydelíme rovnicu l_2, vytkneme l_1, ak sme správne počítali tak dostávame

$$p_2 = (p_\mathrm{a} - p_\mathrm{Hg}) \frac{l_1}{l_2} \,.$$



Obr. 1: Znázornenie pôsobiacich síl

Zároveň však platí aj rovnica (2). Keďže sa ľavé strany rovníc rovnajú, musia sa rovnať aj pravé strany. Takáto metóda riešenia sústav rovníc sa nazýva porovnávacia metóda.

$$p_\mathrm{Hg} + p_\mathrm{a} = (p_\mathrm{a} - p_\mathrm{Hg}) \frac{l_1}{l_2} \,,$$
$$(p_\mathrm{Hg} + p_\mathrm{a})\, l_2 = (p_\mathrm{a} - p_\mathrm{Hg})\, l_1 \,.$$

Z rovnice si vyjadríme roznásobením zátvoriek a ďalšou úpravou p_a

$$l_2 p_\mathrm{Hg} + l_2 p_\mathrm{a} = l_1 p_\mathrm{a} - l_1 p_\mathrm{Hg} \,,$$

Členy ktoré obsahujú p_a dáme na jednu stranu rovnice a členy, ktoré obsahujú p_Hg na druhú stranu

$$(l_2 + l_1)\, p_\mathrm{Hg} = p_\mathrm{a}\,(l_1 - l_2) \,,$$
$$p_\mathrm{a} = p_\mathrm{Hg} \frac{l_2 + l_1}{l_1 - l_2} \,.$$

Dosadíme si za p_Hg rovnicu (3), vyjadrenie pre tlak ortuťového stĺpca, a dostávame výsledný vzťah

$$p_\mathrm{a} = h\varrho g \frac{l_2 + l_1}{l_1 - l_2} \,,$$

Zostáva už iba dosadiť jednotky. Dĺžky l_1 a l_2 môžeme dosadzovať aj v cm, pretože centimetre budú v čitateli aj v menovateli a „vykrátia" sa. To znamená, že keď dosadíme do čitateľa aj menovateľa zlomku hodnoty v metroch, ktoré sú 100-krát menšie, hodnota zlomku nezmení. Ale ak si naozaj nie ste istí, že takúto úpravu môžeme použiť, dosaďte radšej všetko v základných jednotkách SI. Teda

$$p_{\mathrm{a}} = 0{,}1\,\mathrm{m} \cdot 13\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot \frac{16{,}5\,\mathrm{cm} + 21{,}5\,\mathrm{cm}}{21{,}5\,\mathrm{cm} - 16{,}5\,\mathrm{cm}} \doteq 102\,600\,\mathrm{Pa}\,.$$

Poznámky k došlým riešeniam

Mnohí z vás predpokladali, že atmosférický tlak je rovný hydrostatickému tlaku ortuti. A tak vypočítali, že $p_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{Hg}} = h\varrho g = 13\,500\,\mathrm{Pa}$, čo bola chyba, pretože ste nezapočítali tlakovú silu uviaznutej bubliny.

Niektorí z vás po vypočítaní pomeru tlakov tento pomer príliš zaokrúhlili, čím vo výsledkoch vznikali nepresnosti. Zaokrúhľovať by sme mali po správnosti iba konečný výsledok; medzivýsledky by sme mali udržiavať čo najpresnejšie.

Ďalším často opakovaným problémom bolo, že ste používali Boyleův-Mariottův zákon bez toho, aby ste jeho použitie zdôvodnili.

Michal Červeňák
`miso@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.