

Úloha IV.1 ... Lázeň

3 body; průměr 2,27; řešilo 84 studentů

Franta z Rána se jde mýt. Má pokažený bojler, tak si vodu ohřeje na sporáku. Od minulého koupání ví, že když připravená voda ve vaně bude mít 47°C , než se svlékne a ponoří se do ní, bude mít voda optimální teplotu. Vroucí voda z jeho sporáku má 98°C a voda z vodovodu 15°C . Ve vaně chce mít celkem 100l vody. Kolik vody musí dát ohřát, když při vaření se mu 2% vody vypaří?

Na počátku si musíme uvědomit, že když do vany nalijeme horkou a studenou vodu, budeme mít po chvíli ve vaně vodu o nějaké střední teplotě kvůli tepelné výměně. To znamená, že horká voda odevzdala část své energie (tepla) vodě studenější, aby se teplota v kapalině vyrovnala. Tepelné ztráty, ke kterým by zde mělo docházet, pro zjednodušení zanedbáme. K tomu, abychom určili, kolik horké vody budeme potřebovat, použijeme kalorimetrickou rovnici

$$Q_1 = Q_2,$$

kde Q_1 je teplo, o které horká voda přijde, a Q_2 teplo, které studená voda přijme. Tuto rovnici si dále rozepíšeme do následující podoby

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2), \quad (1)$$

kde c_1 je měrná tepelná kapacita horké vody, m_1 hmotnost horké vody, t_1 teplota horké vody a t požadovaná teplota vody. Na druhé straně rovnice je značení obdobné, pouze index 2 označuje veličiny, jež se vážou ke studené vodě.

Dále pak budeme předpokládat, že měrná tepelná kapacita je stejná jak pro horkou, tak pro studenou vodu, takže se v rovnici vykrátí. Nyní jedinou neznámou veličinou je hmotnost. Víme však, že Franta chce mít ve vaně celkem 100l vody

$$V_1 + V_2 = 100l, \quad (2)$$

kde V označuje objem a indexy 1 a 2 horkou a studenou vodu. Dále objem dokážeme vyjádřit pomocí vzorce

$$V = \frac{m}{\rho},$$

kde m je hmotnost, ρ hustota a V objem vody. Tento vztah si dosadíme do rovnice (2) a vyjádříme si z ní hmotnost studené vody

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{\rho} + \frac{m_2}{\rho} &= V_1 + V_2. \\ m_2 &= (V_1 + V_2) \rho - m_1. \end{aligned}$$

Dalším krokem bude dosazení m_2 do rovnice (1)

$$m_1 \cdot (t_1 - t) = [(V_1 + V_2) \rho - m_1] (t - t_2),$$

z které vyjádříme m_1

$$m_1 = (V_1 + V_2) \rho \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}.$$

Protože víme $m_1 = \rho V_1$, zjišťujeme, že výsledný objem horké vody nezávisí na její hustotě

$$V_1 = (V_1 + V_2) \frac{t - t_2}{t_1 - t_2}.$$

Nyní jsme získali obecnou rovnici pro množství horké vody, kterou Franta nalije do vany. Číselně dostaneme

$$V_1 = 1001 \cdot \frac{47^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}}{98^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}} \doteq 38,61.$$

Franta ale bude potřebovat v hrnci vody více, poněvadž dá vařit vodu o objemu V' . Při vaření se mu vypaří 2 % původního množství, takže do vany bude nalévat pouze 98 % $\cdot V'$, což je náš již známý objem V_1 . Zde tedy použijeme trojčlenku

$$\begin{aligned} 98\% \cdot V' &\dots\dots 38,61, \\ 100\% \cdot V' &\dots\dots 38,61 \cdot \frac{100\%}{98\%} \doteq 39,31. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že Franta bude muset nechat ohřát 39,34 l vody.

Poznámky k došlým řešením

Chtěli bychom upozornit hned na několik nedostatků, které mnohá vaše řešení obsahovala.

Prvním z nich bylo, že mnozí z vás předpokládali $1\text{ l} = 1\text{ kg}$, aniž by to jakkoliv zdůvodnili. Tento předpoklad je sice správný právě díky vhodné hustotě vody, ale není zcela přesný. Další, často opakovanou a asi nejvýznamnější chybou, bylo špatné určení procent v trojčlence. Nemalý počet řešitelů napsal, že Franta dá vařit 102 % vody. Často se také ve vašich řešeních objevovalo směšovací a křížové pravidlo. Tady bych podotkla, že myšlenka je sice správná, ale z fyzikálního hlediska je vhodnější vycházet z kalorimetrické rovnice.

Poslední dvě věci, na které bychom rádi upozornili, jsou nezaokrouhlování výsledku a zapomínání na zápis. Je naprosto zbytečné uvádět výsledek na dvacet desetinných míst, když jste v zadání tak přesné hodnoty neměli, a naprosto nutné udělat zápis, aby i cizí člověk věděl, co znamenají ta písmenka ve vašich rovnicích.

Radka Štefaníková
radka@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.