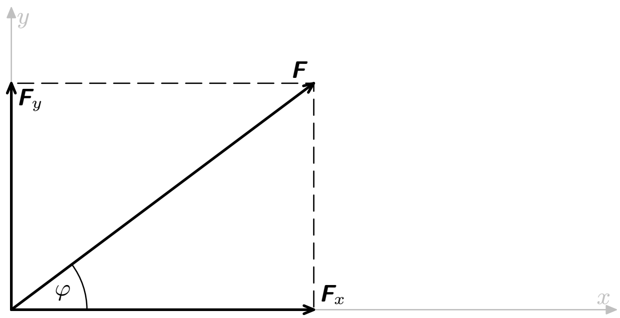
Výfučtení: Vektory

Abychom zcela vyjádřili veličiny jako hmotnost, teplo či náboj, stačí nám k tomu jediné číslo (s příslušnou jednotkou). Říkáme jim *skalární* veličiny.

Běžně se však setkáváme i s veličinami, kde nám k jejich úplnému popisu jedno číslo (s jednotkou) nestačí – patří mezi ně například poloha, rychlost nebo síla, což jsou *vektorové* veličiny. Mají totiž kromě své velikosti také směr a jelikož nežijeme na přímce, budeme k jejich určení potřebovat čísel více. Naivně si můžeme vektor představit jako v prostoru orientovanou šipku určité délky (např. v případě polohy se konec šipky přímo dotýká příslušného místa, v případě síly šipka ukazuje směrem, jímž síla působí).

K určení vektorové veličiny ve třírozměrném prostoru budeme potřebovat čísla tři. Jaká konkrétně, závisí na zvolené *soustavě souřadnic*. Pro naše účely bude nejvhodnější *kartézská* soustava souřadnic, která je jednoduchá a snadno se v ní vektory sčítají a odčítají.

Kartézská soustava je vytyčena navzájem kolmými směry (osami). Pracujeme-li ve třírozměrném prostoru, zpravidla volíme dva směry vodorovné (označené x a y) a jeden směr svislý (označený z). Ve dvourozměrném prostoru (tedy v rovině, například na papíře) zpravidla volíme směr vodorovný označený x a směr svislý označený y. Dále budeme pracovat pro přehlednost se dvěma rozměry, zobecnění do více rozměrů je přímočaré. Za kladný budeme na svislé ose považovat směr nahoru, na vodorovné ose směr doprava. Směry dolů a doleva budou záporné.



Obr. 1: Rozklad síly $\boldsymbol{F}$ do vodorovného a svislého směru.

Vektorovou veličinu[1] jsme pak schopni rozdělit do jednotlivých směrů podle souřadnicových os. Na obrázku 1 je znázorněno rozložení síly $\boldsymbol{F}$ podél souřadnicových os do vodorovné složky $\boldsymbol{F}_x$ a svislé složky $\boldsymbol{F}_y$. Vodorovná složka $\boldsymbol{F}_x$ má velikost $4\,\mathrm{N}$ a svislá složka $\boldsymbol{F}_y$ má velikost $3\,\mathrm{N}$. Velikost[2] celkové síly $\boldsymbol{F}$ určíme z Pythagorovy věty (velikost vektoru v grafickém znázornění odpovídá délce příslušné šipky)

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{|\boldsymbol{F}_x|^2 + |\boldsymbol{F}_y|^2} = \sqrt{(4\,\mathrm{N})^2 + (3\,\mathrm{N})^2} = 5\,\mathrm{N}\,.$$

[1] Vektorové veličiny označujeme tučným písmem, např. $\boldsymbol{F}$. Zejména v rukopise je též běžné označení šipkou nahoře, $\vec{F}$.

[2] Velikost vektorové veličiny $\boldsymbol{F}$ značíme pomocí dvou svislých čar $|\boldsymbol{F}|$ nebo „obyčejným písmem“ F, což odpovídá tomu, že *velikost* vektoru je pouhé jediné číslo (s jednotkou, jde-li o fyzikální veličinu).

Pomocí rozkladu do jednotlivých, navzájem kolmých směrů jsme schopni vektorovou veličinu zapsat. Obvykle zapisujeme velikosti jednotlivých složek do ozávorkovaného sloupečku, v našem případě uvedenou sílu zapíšeme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$

Stejným způsobem můžeme zapsat i jednotlivé kolmé složky síly, do níž jsme původní sílu $\boldsymbol{F}$ rozložili

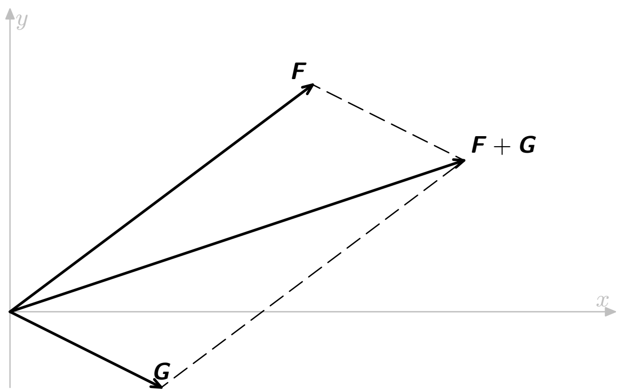
$$\boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,; \qquad \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$

Vektory můžeme sčítat a odčítat – činíme tak po složkách. Řekněme, že na dané těleso působí ve stejném bodě kromě síly $\boldsymbol{F}$ také síla $\boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$

Svislá složka síly $\boldsymbol{G}$ je záporná – směřuje tedy dolů. Pokud na dané těleso již nepůsobí žádná další síla, celkovou sílu působící na těleso určíme jako součet sil $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} F_x + G_x \\ F_y + G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} + 2\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} + (-1\,\mathrm{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{N}\,.$$



Obr. 2: Součet vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$.

Součet vektorů lze snadno znázornit graficky (obrázek 2). Šipky představující vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ doplníme na rovnoběžník a v nově vytvořeném vrcholu bude konec šipky představující jejich součet. Nebo si to můžeme představit jako napojování šipek: šipku $\boldsymbol{G}$ přesuneme tak, aby její začátek byl na konci šipky $\boldsymbol{F}$, ale nesmíme s ní při přesunu otáčet, směr musí zůstat stejný. Na konci přesunuté šipky $\boldsymbol{G}$ bude pak i konec šipky pro součet.

Vektory jako takové tedy můžeme sčítat, ne však jejich velikosti. Při výpočtu velikosti součtu musíme opět použít Pythagorovu větu na součty jednotlivých složek

$$|\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}| = \sqrt{(F_x + G_x)^2 + (F_y + G_y)^2} = \sqrt{(6\,\mathrm{N})^2 + (2\,\mathrm{N})^2} = \sqrt{40}\,\mathrm{N} \approx 6{,}3\,\mathrm{N}\,.$$

Vraťme se na okamžik ještě k obrázku 1. Známe-li velikost vektoru a úhel, který svírá vektor se souřadnicovými osami, dokážeme snadno určit velikosti jeho vodorovné a svislé složky[3]

$$|\boldsymbol{F}_x| = |\boldsymbol{F}|\cos\varphi\,; \qquad |\boldsymbol{F}_y| = |\boldsymbol{F}|\sin\varphi\,.$$

Pokud jste tak již neučinili, všimněte si, že platí také rovnost $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y$.

Další důležitou operací s vektory je násobení skalárem, tedy číslem. Je to jednoduché – daným skalárem prostě vynásobíme všechny složky vektoru

$$t\boldsymbol{F} = t\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tF_x \\ tF_y \end{pmatrix}\,.$$

V grafickém znázornění se vynásobení skalárem t projeví tak, že se šipka představující vektor t-krát prodlouží (a v případě, že je t záporné, bude šipka mířit do opačného směru oproti původnímu).

Násobení skalárem nám umožňuje zapsat vektorový vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Je-li v čase 0 poloha předmětu $\boldsymbol{r}_0$ a pohybuje-li se předmět stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, v čase t bude jeho poloha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t\,.$$

Použili jsme zde násobení vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ s časem t (což je skalár), a dostali jsme tak změnu polohy za dobu t.

Vektory také lze násobit mezi sebou, a to hned dvěma způsoby. Prvním je *skalární součin*. Vynásobením dvou vektorů dostaneme jedno číslo (tedy skalár). Výpočet pro vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ provedeme následujícím způsobem

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3$$

a obdobně pro vektory s jiným rozměrem – vždy sečteme všechny součiny odpovídajících složek obou vektorů.

Velikost vektoru můžeme také vypočítat jako skalární součin jednoho vektoru se sebou samým

$$|u| = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}\,.$$

Geometrický význam skalárního součinu je

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|\cdot\cos\varphi\,,$$

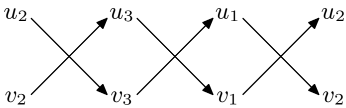
kde φ je úhel svíraný těmito vektory. Po úpravě tohoto vztahu lze snadno zjistit velikost úhlu φ. Také je vidět, že skalární součin dvou na sebe kolmých vektorů bude vždy nabývat nulové hodnoty ($\cos 90^\circ = 0$).

[3]Goniometrickým funkcím sin a cos jsme se věnovali v seriálovém textu ke třetí sérii 1. ročníku, viz `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik1/serie3.pdf`.

Dalším způsobem násobení vektorů je *vektorový součin*. Tento součin lze provést pouze v třírozměrném prostoru, nikoli v rovině (což je dvourozměrný prostor) či vícerozměrném prostoru. Vzniká při něm vektor kolmý k oběma původním vektorům. Značí se $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ a jeho složky získáme pomocí předpisu

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} ,$$

který lze sestavit podle obrázku 3.

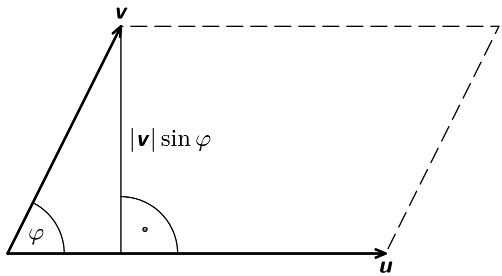


Obr. 3: Vektorový součin $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Velikost takto vzniklého vektoru můžeme také zapsat jako

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}| \cdot \sin\varphi$$

a udává nám obsah rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ (obrázek 4).



Obr. 4: Velikost vektorového součinu $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Některé důležité fyzikální veličiny jsou definovány jako vektorový součin. Například moment síly působící na hmotný bod

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

nebo moment hybnosti hmotného bodu

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} ,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je vzdálenost hmotného bodu od počátku souřadnic, $\boldsymbol{p}$ je jeho hybnost a $\boldsymbol{F}$ na něj působící síla. S momentem hybnosti se pojí poměrně důležitý *zákon zachování momentu hybnosti*, jenž praví, že celkový moment hybnosti se v isolované soustavě s časem nemění. Celkový moment hybnosti získáme (vektorovým) součtem momentů hybnosti všech hmotných bodů v soustavě obsažených.

Pokud spojíme skalární a vektorový součin, získáme tzv. *smíšený součin*.

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} \, .$$

Tímto součinem nám vznikne opět jedno číslo, jehož hodnota je velikost objemu rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory v prostoru.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.