Úloha II.C . . . Seriálová

4 body; průměr 2,62; řešilo 42 studentů

a) *Vypočtěte vektory* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *sečtením a odečtením vektorů* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *a určete velikost úhlu, který svírají vektory* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

b) *Ke každému vektoru z předchozí úlohy najděte kolmý vektor. Jaký by byl vektor kolmý zároveň k oběma vektorům* $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

c) *Určete obsah trojúhelníku, jehož dvě strany jsou vektory* $\boldsymbol{e}$ *a* $\boldsymbol{f}$.

a) Vektor $\boldsymbol{a}$ vypočteme sečtením jednotlivých složek zadaných vektorů. Vektor $\boldsymbol{b}$ naopak jejich odečtením. V jakém pořadí se rozhodneme vektory odčítat nám ovlivní pouze orientaci výsledného vektoru, ale jeho velikost a směr budou stejné.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 5 \\ 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 5 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Úhel svíraný vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ lze snadno zjistit ze vzorečku uvedeného v textu seriálu.

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}} = \frac{3 \cdot (-7) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2}} = -0{,}8\,,$$
$$\varphi = 143{,}13^\circ\,.$$

b) Kolmé vektory svírají úhel 90° a jejich skalární součin se tedy rovná

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos 90^\circ = 0\,.$$

Pro zjištění kolmých vektorů dosadíme do vztahu pro skalární součin jeden z vektorů. Kolmý vektor $\boldsymbol{g}$ k vektoru $\boldsymbol{u}$ určíme následujícím způsobem

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{g} = u_1 \cdot g_1 + u_2 \cdot g_2 = -2g_1 + 1g_2 = 0\,.$$

Jednu ze složek hledaného vektoru $\boldsymbol{g}$ můžeme zvolit libovolně a druhou dopočteme ze vztahu výše. Potom může vektor $\boldsymbol{g}$ vypadat například

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Další kolmé vektory $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ k vektorům $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ se určí obdobně. Například můžeme získat následující vektory

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Otočením původního vektoru o 90° kolem počátku získáme také kolmý vektor. Pokud si to načrtneme do kartézské soustavy souřadnic, můžeme si všimnout, že výsledný kolmý vektor se liší od původního pouze prohozením souřadnic vektoru a změnou znaménka u jedné souřadnice. Např. nalezené vektory $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ a $\boldsymbol{j}$ toto splňují. Jsou to tedy vektory otočené o 90° a mají stejnou délku jako původní vektory.

Kolmý vektor k vektorům $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$ vytvoříme pomocí vektorového součinu zadaných vektorů. Takový vektor bude kolmý na rovinu, ve které leží vektory $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$, a tedy i k těmto vektorům.

$$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 6 \\ 15 - 28 \\ -8 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ -13 \end{pmatrix} .$$

c) Velikost vektorového součinu daných vektorů $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$ je obsah rovnoběžníku, jehož strany tvoří tyto vektory. Polovina takového rovnoběžníku je hledaný obsah trojúhelníku.

$$|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{13^2 + (-13)^2 + (-13)^2} = \sqrt{3 \cdot 13^2} = \sqrt{3} \cdot 13 \doteq 22{,}52 ,$$

$$S = \frac{|\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{f}|}{2} = \frac{13}{2}\sqrt{3} \doteq 11,26 .$$

Chtěli bychom poděkovat Matěji Mezerovi, který nás upozornil na následující chybu v textu seriálu. Namísto vzorce

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\varphi$$

je správně

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\varphi .$$

Eliška Pilátová
eliska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.