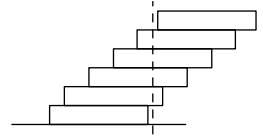


Úloha II.2 ... Zítřa se začnu učít

3 body; průměr 0,79; řešilo 67 studentů

Během minulého zkouškového období shledal matfyzák Pepa, že už na stole nemá dostatek místa, a tak se rozhodl, že si pracovní místo přeorganizuje. Jako nejvhodnější se mu zdálo přesunout knihu Diferenciální počet I mimo stůl, ale tak, aby tato kniha byla stále v dosahu.

Ovšem ani nejbližší skříňka nebyla dostatečně blízko, aby na knihu dosáhl. Sesbíral proto po pokoji všechny nepotřebné učebnice a vyskládal z nich na skříňku sloupec knih tak, že každou další knihu vysunul o kousek blíže stolu než tu předchozí, ale zároveň ne moc, aby se sloup knih nezřítil. Knihy poskládal tak, že pod vrchním Diferenciálním počtem I nebyl ani kousek nejspodnější knihy. Na takto odsunutou knihu už Pepa v pohodě dosáhl. Kolik nejméně knih je potřeba, aby se dala taková věž z knih postavit, pokud mají všechny použité knihy stejné rozměry (a hmotnosti)?



Obr. 1: Knihy

Najdôležitejšia vec pri riešení príkladu je správne si prečítať zadanie. Písali sme, že Pepa knižky ukladá tak, aby sa nezrútili. To by nám mohlo napovedať, že nejaké riešenie existuje a snažiť sa ho nájsť.

Veľa z vás totiž prehlásilo, že veža s rovnomerne vysunutými knižkami spadne. To je síce správne, ale rovnomerné vysunutie nie je jediná možnosť!

Musíme prísť na to, ako veľmi môžeme jednotlivé knihy vysúvať¹. Hneď si všimneme, že vrchná kniha musí mať svoje ťažisko položené na knihe pod ňou. Aby bola splnená táto podmienka, tak vrchná kniha môže byť vysunutá maximálne o polovicu svojej šírky². Toto však musí platiť aj pre vrchné 2 knihy – ich spoločné ťažisko musí ležať na knihe pod nimi. Podobná podmienka platí aj pre 3, 4, 5 kníh a tak ďalej, až kým sa postupne neprebojujeme k spodku veže. Pri ukladaní takýmto spôsobom bude ľubovoľná časť veže stabilná, a teda stabilná bude aj celá veža.

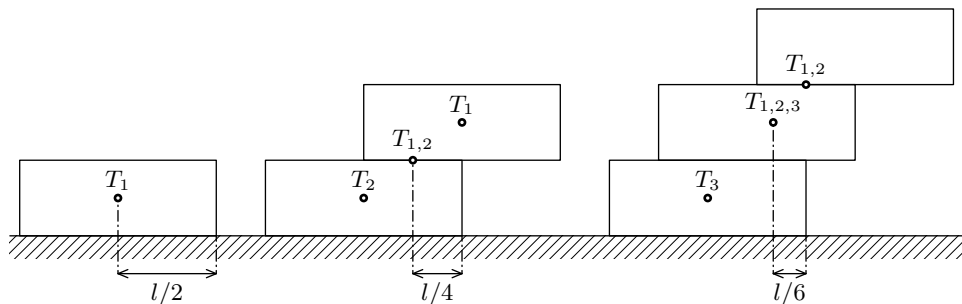
Podme vypočítať jednotlivé vysunutia. Knižky začneme ukladať *pod seba* od najvrchnejšej a budeme ich vysúvať podľa obrázka. Ako sme povedali, prvú vysunieme o $l/2$ jej šírky. Spočítajme spoločné ťažisko prvej a druhej knihy: ak predpokladáme, že všetky knihy sú rovnaké, tak ťažisko bude v strede – teda vo vzdialenosti $l/4$ od pravého okraja druhej knihy:

Tretiu knižku podložíme tak, aby ťažisko $T_{1,2}$ bolo presne nad pravým okrajom tretej knihy. Znova spočítajme ťažisko týchto 3 kníh. Je logické, že bude ležať niekde medzi ťažiskom 3. knihy T_3 a spoločným ťažiskom prvých 2 kníh $T_{1,2}$. Keďže $T_{1,2}$ je nad okrajom 3. knihy, vzdialenosť $T_{1,2}T_3$ bude $l/2$. Ak si uvedomíme, že bod $T_{1,2}$ zastupuje 2 knižky a T_3 jednu, je rozumné očakávať, že ťažisko všetkých 3 kníh $T_{1,2,3}$ bude dvakrát bližšie k $T_{1,2}$. Vzdialenosť $l/2$ si teda rozdelíme na tretiny a hneď vidíme, že spoločné ťažisko 3 kníh sa nachádza vo vzdialenosti $l/6$ od pravého okraja tretej knihy.

Ďalej pokračujeme rovnako. Podložíme štvrtú knihu a urobíme celý proces dookola. Znova budeme deliť vzdialenosť $l/2$ medzi ťažiskom prvých 3 kníh $T_{1,2,3}$ a ťažiskom štvrtej knihy, tentokrát ale na 4 časti. Podobným postupom dospejeme, že spoločné ťažisko 4 kníh je vzdialené o $l/8$. Všimneme si, že sme postupne dostali výsledky $l/2$, $l/4$, $l/6$ a $l/8$. Nemusíme viac počítať: vidíme, že ďalšiu knihu môžeme vysunúť o $l/10$, potom o $l/12$ atď.

¹Keďže chceme nájsť najmenší počet kníh.

²Vtedy bude jej ťažisko položené presne na okraji knihy pod ňou.



Obr. 2: Náčrtok stavania vrchných troch kníh

Lahko overíme, že $l/2 + l/4 + l/6 + l/8 = 25l/24$, čo znamená, že Pepovi stačí 5 kníziek aby dosiahol svoj sen.³

Patrik Švančara
patrik@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

³Kto nevidí, prečo 5 kníh, keď spočítavame iba 4 zlomky, nech si to nakreslí :-).