

Úloha I.E ... Le Système indispensable 6 bodů; průměr 2,36; řešilo 75 studentů

1. V jedné knize našel @adim tabulku, která udávala elektrický odpor, který naměříme, pokud si vezmeme libovolný čtverec daného materiálu o známé tloušťce. Tabulka tedy říká, že naměříme stejný odpor při čtverci o straně 1 cm či čtverci o straně 100 km. Odůvodněte, zda tato tabulka má, či nemá smysl. Jaká by byla jednotka uvedené veličiny?
2. Mějme výraz

$$\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}},$$

kde L je indukčnost cívky, jež se měří v jednotkách henry a C je kapacita kondenzátoru, jež se měří ve faradech. Pomocí rozměrové analýzy ukažte, jakou jednotku má veličina, které se tento výraz rovná.

Podúloha 1 – odpor čtverce

Nejdříve si důkladněji popíšeme, oč v zadání první podúlohy šlo. V zadání, pravda, nebylo výslovně stanoveno, jakým způsobem čtverec zapojujeme.

Pro pořádek si připomeňme názvosloví: čtverec má čtyři *vrcholy* (to jsou „rohy“ čtverce) a čtyři *strany* (což jsou úsečky spojující nejbližší vrcholy). Čtverec o nenulové tloušťce je ve skutečnosti kvádr (u něj bychom hovořili o *vrcholech*, *stěnách* a *hranách*), jehož dvě protější stěny jsou čtvercové. Budeme-li mluvit o straně čtverce, budeme tím tedy myslet jednu ze šesti stěn kvádrů, které nejsou čtvercové.

Zabýváme se případem znázorněným na obrázku 2b), ostatní možnosti budeme analyzovat později. Zdroj napětí je přiložen ke čtverci po celé délce dvou protějších stran (například pomocí dokonale vodivých elektrod, tedy takových, které nemají žádný odpor), takže elektrický potenciál je na každé z těchto stran po celé délce stejný. To je jediné zapojení, při němž teče proud čtvercem „rovně“, což je podmínkou pro platnost vzorce pro výpočet odporu vodiče, který použila většina z vás

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (1)$$

Tento vzorec platí pro proudění kolmým válcem¹ s konstantní hodnotou potenciálu na podstavách (což je v tomto případě splněno). Ve vzorci (1) značí S plochu podstavy (což je též plocha kolmého průřezu) válce a l výšku válce (délku vodiče), ρ je *měrný elektrický odpor* (též *resistivita*). Měrný elektrický odpor je specifický pro daný materiál a nezávisí na tvaru či velikosti vodiče. Jeho jednotkou je $\Omega \cdot \text{m}$, jak lze z uvedeného vzorce snadno dovodit.

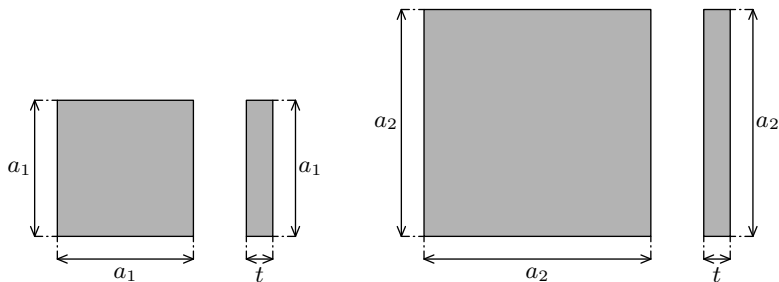
Nyní stačí správně dosadit za l a S . Označme délku strany čtverce a a jeho tloušťku t . Délka vodiče je v tomto případě vzdálenost protějších stran, na něž jsou přiloženy elektrody, tedy $l = a$. Průřez kolmý na směr proudu tvoří obdélník o stranách a a t (obrázek 1), tedy plocha průřezu je $S = at$.

Po dosazení do vzorce (1) dostáváme

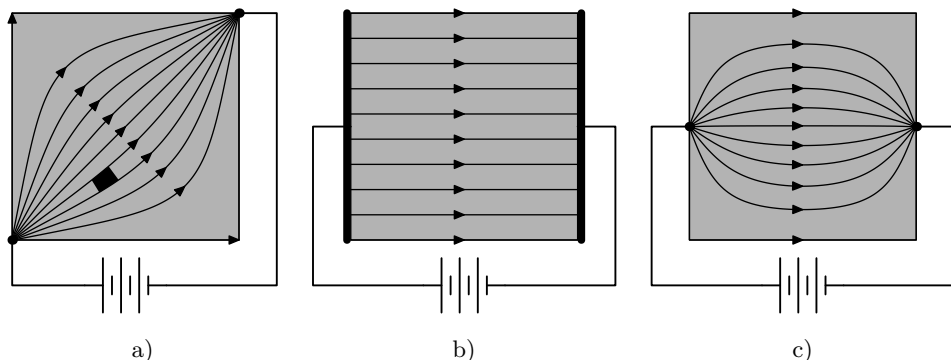
$$R = \frac{\rho a}{at} = \frac{\rho}{t}.$$

Vidíme, že délka strany čtverce se nám vykrátí a že na ní ve výsledku nezávisí.

¹Válcem je zde myšleno libovolné těleso omezené dvěma stejnými rovnoběžnými podstavami a pláštěm, jehož přímký jsou kolmé na podstavu (proto *kolmý* válec). Oproti rozšířené představě se nemusí jednat o rotační válec, jenž má kruhovou podstavu. Podstavou tohoto válce může být třeba obdélník (pak je válec kvádrem).



Obr. 1: Ilustrace rozměrů dvou stejně tlustých „čtverců“ – kolmý pohled a pohled na stranu



Obr. 2: Tři různé způsoby zapojení čtverce ke zdroji napětí se znázorněním směru proudění:
 a) v protějších vrcholech; b) dokonale vodivými elektrodami po celé délce protějších stran;
 c) uprostřed protějších stran

Jiným způsobem, jak lze dojít k témuž závěru, je rozdělit si čtverec na N^2 menších čtverců, z nichž každý má stejný odpor R_m mezi protějšími stranami. Dostaneme tak pomyslnou síť resistorů znázorněnou na obrázku 3 pro $N = 4$. Je zde paralelně zapojeno N větví, v každé větvi sériově N resistorů. Ve schematu bychom mohli mít nakreslené vodiče mezi jednotlivými větvemi na stejné úrovni (tj. u resistorů ve stejném pořadí ve větvi). Avšak na stejné úrovni je stejný potenciál, a proto mezi větvemi navzájem žádný proud neteče.

Odpor R_v jedné větve spočítáme ze vzorce pro odpor série resistorů jako

$$R_v = N \cdot R_m.$$

A odpor R celého čtverce ze vzorce pro odpor paralelně zapojených resistorů

$$R = \frac{1}{N \cdot \frac{1}{R_v}} = \frac{1}{N \cdot \frac{1}{N \cdot R_m}} = R_m.$$

Vidíme tedy, že odpor velkého čtverce je roven odporu malého čtverce, bez ohledu na to, z kolika malých čtverců se velký čtverec skládá. Na délce strany tedy nezáleží.

Nu dobrá. Ale jak to bude s ostatními způsoby zapojení? Když se podíváme na obrázek 2a) nebo c), vidíme, že proud zjevně nepoteče materiálem rovnoměrně jako v případě b). Díky tomu nelze jednoduše použít vzorec (1), protože zde nemáme rovnoběžné proudění válcem. Na přesný výpočet odporu bychom v tomto případě potřebovali znalost pokročilejší matematiky. Nicméně potřebujeme pouze ukázat, zda se změní odpor při změně velikosti čtverce, nikoliv počítat, kolik přesně to bude.

Zkusme si ze čtverce vystříhnout malý kousek vymezený dvěma blízkými proudovými čarami a ekvipotenciálami,² vyznačený na obrázku 2a) černě. Blízké proudové čáry jsou přibližně rovnoběžné, blízké ekvipotenciály také. Navíc proudové čáry jsou kolmé na ekvipotenciály. Vystřížený kousek je proto přibližně obdélník, tedy přibližně kvádr s ekvipotenciálními podstavami. Pro tento kousek bude tudíž (přibližně) platit vzorec (1). Pokud zvětšíme celý čtverec, úměrně se nám zvětší i tento výstřížek. Ale odpor zvětšeného výstřížku se nezmění, protože změna velikosti se stejně jako v předchozím případě ve vzorci vykrátí.

Celý čtverec si můžeme rozdělit na takovéto malé, zhruba obdélníkové kousky. Analogicky s postupem, který jsme ilustrovali na obrázku 3, si můžeme z těchto kousků vytvořit odporovou síť, avšak zde bude mít každý kousek jiný odpor. Když zvětšíme celý čtverec, zvětší se všechny kousky, ale zapojení sítě zůstane zachováno. Jak jsme si právě ukázali, zachová se i odpor jednotlivých kousků v síti. Takže odpor celé sítě také zůstane stejný.

Na okraj uvedme případ, který v zadání nebyl zamýšlen, ale nebyl výslovně vyloučen – že jsme mohli připojit zdroj napětí k protějším stěnám čtverce. V takovém případě by se nám s délkou strany čtverce zvětšoval průřez, ale délka by zůstávala stejná, takže by odpor klesal. Jinak řečeno, při zvětšování by se přidávaly nové cesty, kudy by proud mohl téci, a staré by zůstávaly tak, jak jsou.

A proč se vlastně v tabulce uvádí taková šílená veličina, když máme měrný elektrický odpor, což je rozumná materiálová konstanta? Navíc tloušťka materiálu přece může být různá!

Tato veličina se nazývá *odpor vrstvy* nebo též *povrchová resistivita* a skutečně svůj význam má. Budete-li čmárat na papír tužkou (tuha je vodivá), ulpí na papíře jen tenká vrstva a přes sebevětší snahu se vám tlustší vrstvu načmárat nepodaří. Takže podstatný bude pouze odpor pro určitou tloušťku vrstvy, která ulpí na podkladu. Tato veličina je technickou charakteristikou různých vodivých laků, lepidel, ale i stínících či jiných ochranných folií. Právě odpor vrstvy určuje schopnost elektromagnetického stínění.

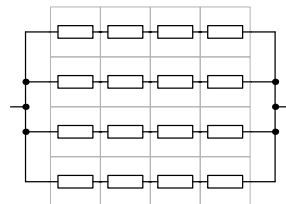
Zjevně se jedná o odpor a jednotkou je tedy ohm (Ω). V technické praxi se pro zřejmost uvádí jako „ohm na čtverec“ (Ω/\square).

Podúloha 2 – úprava jednotek

Pro vyřešení druhé podúlohy stačí za odvozené jednotky H a F dosadit jednotky základní (následující definice byly uvedeny např. v jedné z tabulek ve studijním textu)

$$H = A^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, \quad F = A^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4$$

²Ekvipotenciálu tvoří všechna místa, která mají stejný, pevně zadaný potenciál. Ekvipotenciály jsou kolmé na elektrický proud.



Obr. 3: Schema rozdělení čtverce na malé části

a upravit výraz

$$\frac{1}{\sqrt{H \cdot F}} = \frac{1}{\sqrt{A^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot A^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4}} = \frac{1}{\sqrt{\text{s}^2}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1}.$$

Veličina vyjádřená zadaným výrazem má tedy jednotku s^{-1} .

(Pro úplnost dodejme, že zadaný výraz udává úhlovou frekvenci oscilačního LC obvodu.)

Marek Nečada

marekn@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.