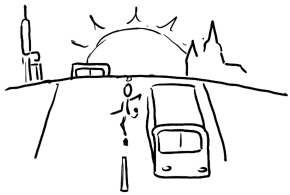
Úloha I.3 ... MHD v Olomouci

4 body; průměr 1,91; řešilo 149 studentů



Franta si vyrazil na výlet do Olomouce. Přijel na hlavní nádraží, a protože neměl drobné, šel do města pěšky.

Po cestě si všiml, že tramvaj číslo 1 jej v protisměru míjí s intervalem $T_p = 10\,\mathrm{min}\,48\,\mathrm{s}$ a stejná linka jedoucí ve směru chůze s intervalem $T_v = 13\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}$.

Cestou domů spočítal interval T, ve kterém tramvaje jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný). Co mu vyjde?

Na první pohled by se mohlo zdát, že úloha je jednoduchá. Vždyť o to, o co se zkrátí doba tramvaje ve směru z centra, je delší doba tramvaje, která jede ve směru do centra. Pak bychom mohli intervaly zprůměrovat a dostaneme výsledek. Ale zdání klame. Lepší bude, pokud úlohu budeme řešit poctivě, fyzikálně...

Nejdříve se zamyslíme nad tím, co by se dělo, pokud by Franta pouze stál na místě. V okamžiku, kdy jej míjí tramvaj, která jede například z centra, tak další tramvaj k Frantovi dojede za čas T, což je interval, se kterým jezdí tramvajová linka číslo 1. Známe-li rychlost tramvaje v_T, můžeme určit vzdálenost $S = v_\mathrm{T} \cdot T$, ve které je druhá tramvaj v okamžiku, kdy Frantu míjí první tramvaj.

Pokud by Franta nestál, ale šel ve směru do centra rychlostí v_F, tak jej tramvaj míjí v intervalu T_P, který je menší než interval T. To odpovídá tomu, že tramvaj nemusí ujet celou vzdálenost S, ale část vzdálenosti $\Delta S = v_\mathrm{F} \cdot T_\mathrm{P}$ ujde Franta sám.

Tramvaj tedy za čas T_P ujede vzdálenost $S - \Delta S$. Teď už máme vše potřebné a stačí to dát jen dohromady. Musí tedy platit

$$T_\mathrm{P} = \frac{S - \Delta S}{v_\mathrm{T}} = \frac{v_\mathrm{T} \cdot T - v_\mathrm{F} \cdot T_\mathrm{P}}{v_\mathrm{T}} = T - \frac{v_\mathrm{F} \cdot T_\mathrm{P}}{v_\mathrm{T}}\,.$$

Obdobně pro tramvaje jedoucí ve směru do centra dostaneme vzdálenost $S + \delta S$, kde $\delta S = v_\mathrm{F} \cdot T_\mathrm{V}$. Zde si můžeme povšimnout, že pokud bychom výsledek chtěli získat prostým průměrováním, tak bychom nedostali správný výsledek, neboť $\Delta \neq \delta$. Snadno vypočítáme vztah pro T_V

$$T_\mathrm{V} = T + \frac{v_\mathrm{F} \cdot T_\mathrm{V}}{v_\mathrm{T}}\,.$$

Vztah pro T_P můžeme dále upravit

$$\frac{T_\mathrm{P}}{T_\mathrm{P}} = \frac{T}{T_\mathrm{P}} - \frac{v_\mathrm{F}}{v_\mathrm{T}}$$
$$\frac{v_\mathrm{F}}{v_\mathrm{T}} = \frac{T}{T_\mathrm{P}} - 1\,.$$

a dosadit do vztahu pro T_V a dostaneme

$$T_\mathrm{V} = T + \left(\frac{T}{T_\mathrm{P}} - 1\right) \cdot T_\mathrm{V}$$
$$1 = \frac{T}{T_\mathrm{V}} + \frac{T}{T_\mathrm{P}} - 1$$
$$2 = T \cdot \left(\frac{1}{T_\mathrm{V}} + \frac{1}{T_\mathrm{P}}\right) = T \cdot \frac{T_\mathrm{V} + T_\mathrm{P}}{T_\mathrm{V} \cdot T_\mathrm{P}}$$
$$T = 2 \cdot \frac{T_\mathrm{V} \cdot T_\mathrm{P}}{T_\mathrm{V} + T_\mathrm{P}}\,.$$

Pokud dosadíme za $T_\mathrm{V} = 13\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s} = 810\,\mathrm{s}$ a za $T_\mathrm{P} = 10\,\mathrm{min}\,48\,\mathrm{s} = 648\,\mathrm{s}$ dostaneme

$$T = 720\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{min}\,.$$

Pokud bychom postupovali tak, jak bylo nastíněno v úvodu, a čísla pouze zprůměrovali, dostali bychom hodnotu $T = 729\,\mathrm{s}$, což evidentně není správně.

®***adim Pechal***
radim@fykos.cz