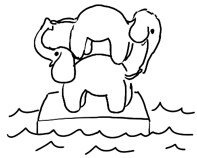
## Úloha I.2 ... Noemova krychle

4 body; průměr 3,06; řešilo 217 studentů



*Mějme krychli o hraně* 10 m *vyrobenou ze dřeva o hustotě* 850 kg·m$^{-3}$. *Krychle plove na vodě. Jaká část krychle vyčnívá nad hladinu? Jak se změní výška vyčnívající části, vstoupí-li na krychli slon o hmotnosti* 1 t*? Kolik nejvýše slonů může být na krychli, aniž by se celá ponořila?*

Nejprve rozebereme, co se stane, ponoříme-li těleso do kapaliny. Na těleso bude působit tíhová a vztlaková síla. V závislosti na hustotě tělesa a kapaliny mohou nastat tři případy:

- pokud $\varrho_\mathrm{v} < \varrho_\mathrm{T}$, potom $F_\mathrm{vz} < F_g \Rightarrow$ těleso klesne ke dnu,
- pokud $\varrho_\mathrm{v} = \varrho_\mathrm{T}$, potom $F_\mathrm{vz} = F_g \Rightarrow$ těleso se jakoby „vznáší“ v kapalině (výsledná síla, která na něj působí, je nulová),
- pokud $\varrho_\mathrm{v} > \varrho_\mathrm{T}$, potom $F_\mathrm{vz} > F_g \Rightarrow$ těleso plove na hladině.

V našem příkladu nastane třetí situace. Pro těleso ponořené do kapaliny platí tzv. Archimedův zákon, který zní: *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené.* Napíšeme-li si tento zákon vzorečkem, dostaneme

$$\begin{aligned} F_g &= F_\mathrm{vz}\,, \\ mg &= V_\mathrm{T}\varrho_\mathrm{k} g\,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $V_\mathrm{T}$ je objem ponořené čási tělesa, který určíme jako obsah podstavy krát výška ponořené části $V_\mathrm{T} = a^2h$ a $\varrho_\mathrm{k}$ je hustota kapaliny, v našem případě vody $\varrho_\mathrm{k} = 1000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Hmotnost krychle určíme pomocí známého vztahu pro hustotu, kde za objem krychle dosadíme $V = a^3$

$$\begin{aligned} \varrho_\mathrm{T} &= \frac{m}{V}\,, \\ m &= \varrho_\mathrm{T} V\,, \\ m &= \varrho_\mathrm{T} a^3\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (1), dostaneme

$$\varrho_\mathrm{T} a^3 g = a^2 h \varrho_\mathrm{k} g\,.$$

Vyjádříme $h$

$$h = \frac{\varrho_\mathrm{T}}{\varrho_\mathrm{k}} a\,.$$

Číselně nám vychází

$$\begin{aligned} h &= \frac{850\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}{1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}\cdot 10\,\mathrm{m}\,, \\ h &= 8{,}5\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Nad hladinu tedy vyčnívá $h_1 = a - h = (10 - 8{,}5)\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$ z výšky krychle, tj. $1{,}5/10 = 0{,}15 = 15\,\%$ krychle.

Stoupne-li si na krychli slon o hmotnosti $m' = 1\,\mathrm{t} = 1\,000\,\mathrm{kg}$, bude na ni působit kromě vztlakové a tíhové síly také tíha slona $F_g'$

$$\begin{aligned} F_g + F_g' &= F_\mathrm{vz}\,, \\ \varrho_\mathrm{T} a^3 g + m' g &= a^2 h' \varrho_\mathrm{k} g\,. \end{aligned}$$

Vyjádříme si $h'$

$$h' = \frac{\varrho_\mathrm{T} a^3 + m'}{\varrho_\mathrm{k} a^2} \,.$$

Číselně nám vyjde

$$h' = \frac{850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} \cdot (10\,\mathrm{m})^3 + 1\,000\,\mathrm{kg}}{1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,(10\,\mathrm{m})^2} \,,$$
$$h' = 8{,}51\,\mathrm{m} \,.$$

Nad hladinu vyčnívá $h_2 = a - h' = (10 - 8{,}51)\,\mathrm{m} = 1{,}49\,\mathrm{m}$. Změna výšky vyčnívající části je $\Delta h = h_2 - h_1 = 1{,}5\,\mathrm{m} - 1{,}49\,\mathrm{m} = -0{,}01\,\mathrm{m}$. Krychle tedy klesne o 1 cm.

Aby se krychle celá nepotopila, musí nějaká její část vyčnívat nad hladinu. Je-li $n_\mathrm{max}$ nejvyšší možný počet slonů, který může na krychli vstoupit, výsledná rovnice bude

$$F_g + n_\mathrm{max} F'_g < F_\mathrm{vz} \,,$$
$$\varrho a^3 g + n_\mathrm{max} m' g < \varrho_k a^3 g \,.$$

Vyjádříme si $n_\mathrm{max}$

$$n_\mathrm{max} < \frac{a^3(\varrho_k - \varrho_\mathrm{T})}{m'} \,,$$
$$n_\mathrm{max} < \frac{(10\,\mathrm{m})^3 \cdot (1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} - 850\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})}{1\,000\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}} \,,$$
$$n_\mathrm{max} < 150 \,.$$

Z toho vyplývá, že nejvýše může na krychli vstoupit 149 slonů, aniž by se celá ponořila.

***Lukáš Fusek***
lukasf@fykos.cz