Výfučtení: Zanedbat, či nezanedbat?

V šestém a posledním Výfučtení tohoto ročníku se podíváme na téma, které se ve fyzice využívá možná více, než si myslíte. Některé vzorce jsou pro naše účely někdy až moc přesné a složité. Můžeme je ale upravit tak, aby pro nějaký okruh čísel – typicky třeba pro malé hodnoty – byly jednodušší a téměř nezměnily výsledek. Této technice říkáme *aproximování* a právě na aproximace se v tomto Výfučtení podrobně podíváme.

Aproximování mocnin

Mocniny si většinou spojujeme se zvětšováním čísel, řekněme ale, že máme nějaké kladné x, které je velmi malé ve srovnání s číslem 1.[1] Zvolme například $x = 0{,}001 = 10^{-3}$. Pokud x umocníme, dostaneme $x^2 = 0{,}001^2 = 0{,}000\,001 = 10^{-6}$. Vidíme, že umocněním jsme dostali podstatně menší hodnotu.

Představme si nyní x ve výrazu $(1 + x)^2$. Když výraz klasicky roznásobíme, dostaneme

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \,.$$

V předchozím odstavci jsme si ale ukázali, že kladné mocniny x jsou oproti x velmi malé a ve většině případů zanedbatelné. Při aproximaci tak můžeme člen x^2 jednoduše vynechat, čímž dostaneme

$$(1 + x)^2 \approx 1 + 2x \,.$$

Je důležité poznamenat, že tyto dva výrazy se nerovnají. Dá se pouze říct, že pro malá x mají výrazy přibližně stejnou hodnotu. Zkusme si nyní ověřit, že aproximace výsledek téměř nezmění, tedy vypočítáme hodnoty výrazu bez aproximace a s ní pro dříve zvolené $x = 10^{-3}$. Bez aproximace máme $1 + 2x + x^2 = 1{,}002\,001$. S aproximací dostaneme $1 + 2x = 1{,}002$. Rozdíl se projeví až na 6. desetinném místě, což je ve většině výpočtů již opravdu zanedbatelný rozdíl.

Co kdybychom ale měli výraz s vyšší mocninou? Ukázali jsme si, že $x^2 = 10^{-6}$ je podstatně menší než $x = 10^{-3}$. Asi vás nepřekvapí, že třetí mocnina bude ještě menší, $x^3 = 10^{-9}$.

Je evidentní, že pokud je x malé, nemá smysl s vyššími mocninami počítat. Vraťme se teď k našemu původnímu výrazu $(1 + x)$. Tentokrát ho ale umocněme na třetí. Rozložením dostaneme

$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \,.$$

Členy s x^2 a x^3 můžeme opět zanedbat a dostaneme tak $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$. Obdobně můžeme aproximovat jakoukoli další vyšší mocninu

$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \approx 1 + 4x \,,$$
$$(1 + x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \approx 1 + 5x \,.$$

V tabulce 1 je vidět, jak se výraz $(1 + x)^k$ mění pro postupně vyšší mocniny (pro $x = 0{,}001$).

Při aproximování tedy pro každé $x \ll 1$ platí

$$(1 + x)^k \approx 1 + kx \,. \tag{1}$$

[1] Matematický zápis této skutečnosti je $x \ll 1$, znak $\ll$ znamená mnohem menší. Ten používáme, pokud je rozdíl porovnávaných veličin alespoň 2 řády např. $1 \ll 100$.

k	$(1+x)^k$	$1+xk$
1	1,001 000 000	1,001 000 000
2	1,002 001 000	1,002 000 000
3	1,003 003 001	1,003 000 000
4	1,004 006 004	1,004 000 000
5	1,005 010 010	1,005 000 000

Tabulka 1: Vyčíslení mocniny $(1+x)^k$ a její aproximace $1+xk$, pro $x = 10^{-3}$

Přestože jsme tento výraz vždy upravovali pro přirozená k, aproximace platí pro libovolné celé k, což si můžete zkusit odvodit v 1. úloze spojené s tímto Výfučtením. Obdobně lze vzorec upravit pro $(1-x)^k$. Dokonce se dá dokázat (sice už ne tak snadno), že vzorec (1) platí i pro libovolné reálné k.

Aproximaci můžeme rozšířit i na obecný výraz ve tvaru $(y+x)^k$, kde $x \ll y$, což se dá dokázat následující úpravou

$$(y+x)^k = y^k \left(1+\frac{x}{y}\right)^k \approx y^k \left(1+k\frac{x}{y}\right) .$$

Vytknutím y^k ze závorky dostaneme výraz ve tvaru $(1+kx/y)$, kde $x/y \ll 1$.

Příkladem použití této aproximace je vzorec pro pozorovanou frekvenci při relativistickém Dopplerově jevu

$$f = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} .$$

Tento vzorec udává, jak se pro pozorovatele změní frekvence f_0, když se od něj vzdaluje zdroj světla rychlostí v ve vakuu. Podívejme se na příklad prolétávající rakety, jejíž rychlost je výrazně menší než rychlost světla $v \ll c$. Poté můžeme vzorec aproximovat a dostaneme známější tvar

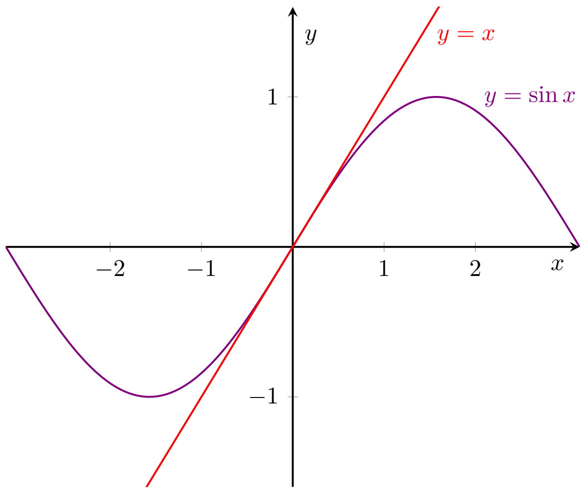
$$\begin{aligned} f &= f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = f_0\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} = f_0(1-v/c)^{1/2}(1+v/c)^{-1/2} \\ &\approx f_0\left(1-\frac{v}{2c}\right)\left(1-\frac{v}{2c}\right) = f_0\left(1-\frac{v}{2c}\right)^2 \approx f_0\left(1-\frac{v}{c}\right) . \end{aligned}$$

Aproximace malých úhlů

Další typ aproximace se týká goniometrických funkcí, konkrétně funkce sinus. Pokud funkci sinus znáte, víte, že se nejedná o lineární funkci.[2] Pokud se však podíváme na sinus v blízkém okolí 0, uvidíme, že zde funkce roste skoro lineárně (vizte graf 1). Pokud nás tedy zajímají jen malé úhly, můžeme zavést aproximaci $\sin x \approx x$. Tato aproximace ale platí jen pro úhly vyjádřené v radiánech – ve stupních by nám vyšla špatná hodnota.[3]

Opět si aproximaci ověříme. Znovu zavedeme x s malou hodnotou, tentokrát třeba $x = 0{,}1\,\mathrm{rad}$. Pokud do kalkulačky zadáme $\sin x$, vyjde nám hodnota 0,099 8. Vidíme, že nám vyšla téměř stejná hodnota funkce sinus jako jejího argumentu. Aproximace $\sin x \approx x$ je celkem

[2] Lineární funkce je funkce, jejímž grafem je přímka.
[3] Úhel můžeme vyjádřit v radiánech vynásobením jeho hodnoty ve stupních konstantou $\pi/180$.



Obrázek 1: Porovnání funkcí $y = x$ a $y = \sin x$

přesná až do zhruba 0,2 rad, což odpovídá úhlu 11,5 °. Někdy nepotřebujeme tak přesný výsledek a můžeme aproximaci použít i pro ještě větší úhly, někdy už ale nebude stačit ani přesnost u 0,2 rad. Záleží na tom, co zrovna počítáme, a musíme sami zvážit, jestli je aproximace ještě postačující.

U funkce kosinus tuto aproximaci použít nemůžeme (alespoň ne tak jednoduše), protože se kosinus v blízkosti goniometrické funkce, víte, že funkce tangens je definovaná jako $\mathrm{tg}\, x = \sin x / \cos x$. U sinu jsme si ukázali, že je v blízkosti 0 přibližně roven x. O funkci kosinus zase víme, že je v blízkosti 0 přibližně rovna 1. Tím pro tangens dostáváme $\mathrm{tg}\, x = \sin x / \cos x \approx x/1 = x$. I pro funkci tangens tak můžeme využít aproximaci $\mathrm{tg}\, x \approx x$. Opět ale musíme dosazovat úhel v radiánech. Aproximace není tak přesná jako u sinu, lze ji tedy většinou použít jenom do hodnot 0,15 rad, viz tabulka 2.

$\frac{x}{\mathrm{rad}}$	$\sin x$	$\mathrm{tg}\, x$
0,1	0,099 8	0,100 3
0,2	0,198 7	0,202 7
0,3	0,295 5	0,309 3
0,4	0,389 4	0,422 8
0,5	0,479 4	0,546 3

Tabulka 2: Porovnání $\sin x$ a $\mathrm{tg}\, x$ pro malé hodnoty x v radiánech. Zaokrouhleno na 4 desetinná místa.

Pravděpodobně nejznámější použití aproximace $\sin x \approx x$ je ve vzorci pro periodu matematického kyvadla. Tento vzorec nejspíše znáte ve tvaru

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

kde l je délka lana a g tíhové zrychlení. Většinou, když se tento vzorec uvádí, je u něj připsáno, že je použitelný jen pro malé vychýlení kyvadla. Při určení síly, která navrací kyvadlo do rovnovážné polohy, se potkáme s tvarem $-mg\sin\alpha$ a pro malé α dostaneme $-mg\alpha$, tudíž je vratná síla v přiblížení lineární funkcí úhlu vychýlení. Z této aproximace se pak dostaneme ke vzorci pro periodu uvedenému výše, to ovšem vyžaduje složitou matematiku, která je nad úrovní tohoto Výfučtení.

Zajisté jste si také všimli, že perioda kmitů matematického kyvadla nezávisí na počátečním vychýlení. To je pravda jen v případě, kdy využijeme výše zmíněnou aproximaci. Pokud bychom však spočítali periodu přesně, zjistíme, že na počáteční výchylce závisí. Ovšem pro malé výchylky se stává téměř konstantní a platí tedy přibližný vzorec výše.

Odpor vzduchu

Doba volného pádu tělesa o hmotnosti m je popsána vzorcem

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Tento vzorec však můžeme použít pouze v případě, kdy odpor vzduchu nehraje velkou roli. Počítáme tak vlastně, jak dlouho by daný předmět padal ve vakuu (v homogenním gravitačním poli). Pro zanedbávání odporu vzduchu existuje velmi jednoduchý důvod. Pokud bychom chtěli odpor vzduchu započítat, v první řadě bychom potřebovali znát hustotu vzduchu, odporový koeficient předmětu (ten závisí na tvaru tělesa) a plochu kolmého průřezu předmětu. I kdybychom tyto údaje měli, nestačilo by pouze „dosadit do krátkého vzorečku“. Kvůli tomu, že odporová síla velmi složitým způsobem závisí i na rychlosti tělesa, museli bychom řešit matematicky velmi složitou tzv. *diferenciální rovnici*, nebo bychom dobu pádu museli řešit numericky – počítali bychom pozici a rychlost předmětu po malých časových intervalech.

Pro malou kuličku o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$ a s poloměrem $r = 1\,\mathrm{cm}$, která padá na zem z výšky $h = 10\,\mathrm{m}$, je doba pádu bez odporu vzduchu $t = 1{,}428\,\mathrm{s}$. Pokud ale uvažujeme odpor vzduchu, dostaneme hodnotu $t' = 1{,}451\,\mathrm{s}$. Započítání odporu vzduchu změní výsledek pouze o $t' - t = 0{,}023\,\mathrm{s}$, nám ale výpočet zabere minimálně o několik minut déle. Neznamená to ale, že odpor vzduchu se dá zanedbat vždy. Pokud předmět padá z vysoké výšky nebo je velký a zároveň lehký, odpor vzduchu ovlivňuje výsledek mnohem více. V tabulce 3 můžete vidět, jak se rozdíl časů s rostoucí výškou zvětšuje.

V našem příkladu jsme použili ještě další aproximaci, která má na výsledek mnohokrát menší vliv než odpor vzduchu. Počítali jsme totiž s tíhovým zrychlením g. Předpokládáme tak, že gravitační pole je homogenní – v každém bodě má stejnou hodnotu. V realitě se ale gravitační působení mění se vzdáleností těles a míří do středu planety (jedná se totiž o tzv. radiální pole). Za předpokladu, že výška nad povrchem je mnohem menší než poloměr planety, můžeme v této oblasti gravitační pole aproximovat na homogenní.

$\frac{h}{\mathrm{m}}$	$\frac{t}{\mathrm{s}}$	$\frac{t'}{\mathrm{s}}$	$\frac{t'-t}{\mathrm{s}}$
10	1,428	1,451	0,023
20	2,019	2,084	0,065
30	2,473	2,593	0,120
50	3,193	3,452	0,259
100	4,515	5,256	0,741

Tabulka 3: Porovnání potřebného času k uražení vzdálenosti h, kde t je čas pádu bez odporu a t' čas pádu se započítáním odporu.

Výpočet pomocí plochy pod grafem

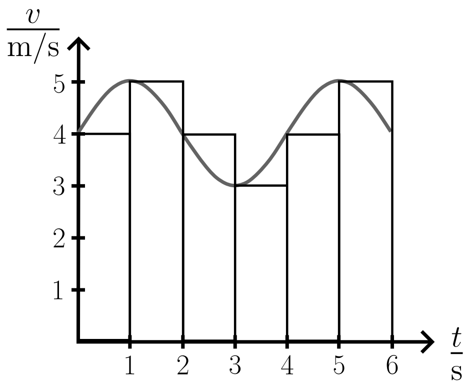
Ve fyzice může nastat případ, kdy je jednodušší problém vyřešit graficky než složitým výpočtem. Co tím myslíme, si ukážeme na příkladu výpočtu práce.

Práci lze za působení konstantní síly jednoduše popsat vzorcem $W = Fs$, kde s je uražená dráha, po kterou jsme silou F působili. Vzorec práce nám může připomínat vzorec na výpočet obsahu obdélníku $S = ab$ o stranách a a b. Když si nakreslíme závislost F na s, zjistíme, že W se opravdu rovná ploše pod grafem – v tomto případě obdélníku o stranách F a s.

Co když ale síla v průběhu pohybu nebude konstantní? Podívejme se na příklad pružiny. Při vychýlení z rovnovážné pozice o vzdálenost x zjistíme, že velikost vratné síly roste v průběhu natahování. Velikost vratné síly je rovna $F = kx$, kde k je tuhost pružiny, která popisuje, jak náročné je s pružinou pohybovat. Naivně bychom mohli předpokládat, že práce, kterou vykonáme natáhnutím pružiny, poté bude $W = Fx = kx^2$. Ale není tomu tak. Podívejme se na situaci graficky. Stejně jako předtím si nakreslíme závislost F na x, avšak tentokrát vzniklý tvar nebude obdélník, ale trojúhelník. Jelikož víme, že síla roste podle rovnice $F = kx$, dokážeme určit plochu pod grafem jako $W = kx^2/2$. Vidíme, že vzorec se oproti naivnímu výpočtu liší o násobek jedné poloviny.

Obrázek 2: Grafy závislostí velikosti síly na dráze pro různé pohyby

Ve výše uvedeném případě se nám podařilo tímto způsobem problém vyřešit exaktně. Podívejme se na případ, kdy známe reálnou závislost rychlosti automobilu na čase – viz obrázek 3. Jak bychom dokázali určit celkovou uraženou dráhu? Znovu nám pomůže vzorec, který popisuje nejjednodušší případ rovnoměrného pohybu. Má tvar $s = vt$, což jde znovu chápat jako plocha obdélníku. Měli bychom být znovu schopni v zobecnění vypočítat dráhu jako obsah pod křivkou.



Obrázek 3: Závislost rychlosti na čase pro střídavě zrychlující a zpomalující automobil

Plochu nebudeme počítat přesně, ale po jednotlivých obdélníčcích, protože ty umíme počítat jednoduše. Osu x si rozdělíme na dílky strany jedna a výšku obdélníku určíme vždy jako hodnotu rychlosti na levé straně obdélníčku. Celkově dostaneme součet ploch 6 obdélníků

$$s = (1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5)\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}\,.$$

To se moc neliší od reálného výsledku, který je $s' = 25{,}27\,\mathrm{m}$. Při výpočtu lze vidět, že i když jsme plochu pro některé obdélníčky nadhodnotili a pro jiné podhodnotili, tyto nepřesnosti se vzájemně vyrušily a získali jsme relativně přesný výsledek. Výpočet by šel vylepšit např. volbou menšího kroku (užších obdélníčků) nebo volbou jiného geometrického tvaru např. kombinace trojúhelníků a obdélníků.

Závěr

V tomto Výfučtení jsme si ukázali celkem čtyři způsoby, jak (nejen) ve fyzice aproximovat. Jedná se jen o výběr těch nejužitečnějších metod, ale existují i další triky, které můžeme využít. Při výpočtech ve fyzikálních situacích je tedy vždy dobré se zamyslet, jak přesně potřebujeme znát odpověď na určitou otázku. Podle toho, zda potřebujeme mít výsledek na 3 platné cifry nebo nám stačí řádový odhad, pak můžeme zvolit způsob, jakým budeme počítat.

Max Menčík
max.mencik@vyfuk.org

Patrik Kašpárek
patrik.kasparek@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.