výfuk

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

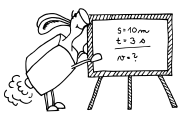
v rukou držíte v pořadí již čtvrtou brožurku letošního ročníku Výfuku. Tentokrát se podíváme například na to, jaká je pravděpodobnost trefení mouchy, dopad namazaného chleba na zem, či bowling s křišťálovou koulí. V páté úloze, která je jako obvykle nejobtížnější, si budete muset poradit s jízdou na velodromu. V rámci experimentální úlohy budete mít příležitost si změřit hmotnost CO_2 v limonádě a ve Výfučtení na vás čeká povídání o vlastnostech Slunce. Kromě zadání nových úloh v brožurce naleznete také vzorová řešení třetí série a průběžné pořadí po třetí sérii.

Na základě tohoto pořadí vám průběžně rozesíláme pozvánky na letní výfučí tábor. Organizátoři mají již vybranou legendu, pustili se do příprav a jsou si jistí, že se letos rozhodně máte na co těšit!

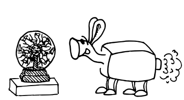
Jelikož je ale tábor zatím daleko a i na tradiční jarní setkání si ještě nějaký ten měsíc počkáme, proběhne na začátku února také zimní víkendovka v Rožmberku nad Vltavou, což je zcela nová výfučí akce.

Doufáme, že si náležitě užijete zimní radovánky a že se budete bavit i při řešení nových výfučích úloh.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.org`



Zadání IV. série



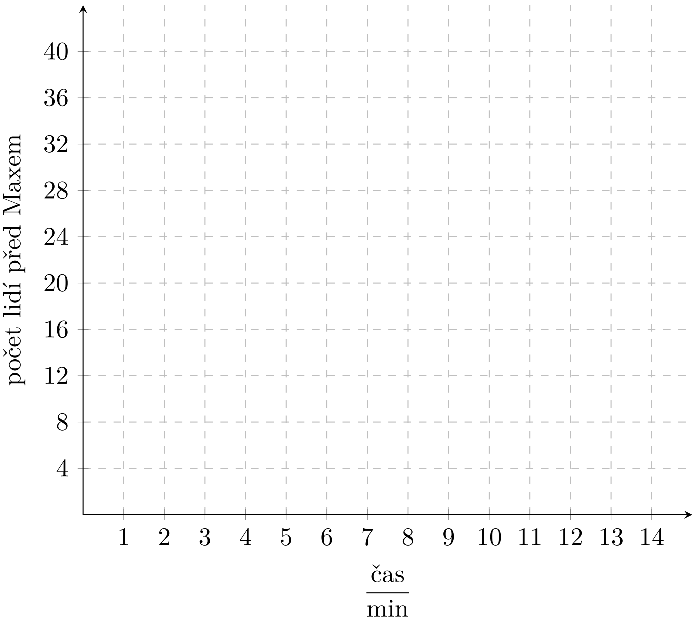
Termín odeslání: 3. 3. 2025 20.00

Úloha IV.1 ... Fronta na oběd ❻ ❼ — 5 bodů

Max čeká ve frontě na oběd. Kuchařky zvládnou vydat 1 oběd po 10 sekundách. Při čekání si ale Max všimne, že ho každých 30 sekund předběhne jeden neposlušný žák. Po prvních pěti minutách navíc předběhne Maxe ještě skupina 12 nezbedných studentů. Po jaké době dostane Max svůj oběd, pokud před ním na začátku (tzn. v čase 0 min) čekalo 40 žáků?

matfyz

Úlohu se můžete pokusit řešit i graficky. V tomto případě postupujte tak, že určíte počet lidí čekajících ve frontě před Maxem v časech, které jsou uvedeny v grafu 1. Následně své výsledky do přiloženého grafu zaneste a pomocí něj určete, kdy se Max k jídlu dostane.



Obrázek 1: Prázný graf na vyplnění

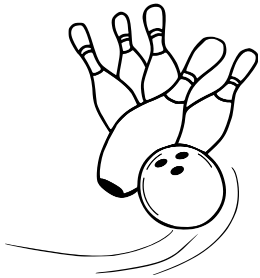
Úloha IV.2 ... Dvě mouchy jednou ranou ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Výfuček se chtěl soustředit na své úžasné fyzikální úvahy a myšlenky, když vtom ho začaly rušit otravné mouchy. V jeden moment však konečně obě přistály na kruhovém stole o průměru 1 m a Výfuček spatřil příležitost. Mouchy jsou na sobě nezávislé a sedí na stole na dvou náhodných místech. Jaká je pravděpodobnost, že Výfuček se zavázanýma očima trefí čtvercovou plácačkou o straně délky 10 cm obě mouchy jednou ranou? Předpokládejte, že celá plácačka dopadne na stůl a že všechna místa na stole mají stejnou pravděpodobnost, že se do nich Výfuček trefí, a zároveň i stejnou pravděpodobnost, že na nich bude sedět moucha. Úder je tak rychlý, že se mouchy nestihnou vůbec pohnout.

Úloha IV.3 ... Zákon schválnosti ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

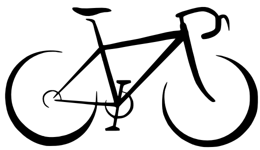
Matěj si k snídani namazal chleba se svou oblíbenou marmeládou od babičky. Je to ale nešika, takže mu chleba spadl. A co hůř – na podlahu dopadl namazanou stranou. Původně jej držel namazanou stranou nahoru a při upuštění mu dodal úhlovou rychlost $3{,}8\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Z jaké nejmenší výšky by musel Matějovi chleba spadnout, aby vykonal alespoň půl otočky a zároveň se po dopadu nepřevážil na namazanou stranu? Uvažujte, že se chleba na danou stranu převáží, pokud tato strana svírá s podlahou úhel menší než $90\,^\circ$.

Úloha IV.4 ... Křišťálový bowling ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů



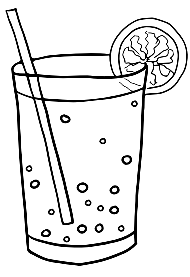
Viktor si šel s Lukášem zahrát bowling. Jelikož mají rádi experimenty, rozhodli se hrát s křišťálovou koulí. Viktor hodil kouli na dráhu dlouhou $s = 20\,\mathrm{m}$ rychlostí $v = 8{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Lukáš si lehl na zem a pozoroval kuželky na konci dráhy skrz kouli. Všiml si, že se jejich velikost mění. Se zaujetím se zamyslel nad tímto jevem a ihned se rozhodl spočítat, jak závisí příčné zvětšení obrazu kuželek Z oproti jejich skutečné velikosti na čase t od vypuštění koule. Pomocí laserového ukazovátka zjistil, že se koule chová jako spojná čočka s ohniskovou vzdáleností $f = 10\,\mathrm{cm}$. Pokuste se stejně jako Lukáš znázornit graficky závislost zvětšení kuželek Z na čase t. Body příslušící spočteným hodnotám času zaneste do grafu s osami Z a t a pokuste se spojit body (přibližně) vhodnou hladkou křivkou.

Úloha IV.5 ... Závody na velodromu ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů



Výfuček sledoval cyklistické závody na velodromu[1] a hned si představil sám sebe jako jednoho ze soutěžících. Spočítejte, v jaké vzdálenosti r od vnitřní hrany velodromu by musel Výfuček jet, aby do cíle dorazil za co nejkratší čas. Předpokládejte, že velodrom je kruhový, má konstantní sklon a že Výfuček pojede tak, aby výslednice na něj působících sil byla kolmá k povrchu velodromu.

Úloha IV.E ... Limča ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů



Lukáše na kolejích velmi zaujal nový sodastream – přístroj na naperlení vody. Začali tedy spolu s Anežkou přemýšlet, jak vlastně funguje. Zjistili, že sodastream do vody přidává potravinářský oxid uhličitý CO_2, to jim ale nestačilo a rozhodli se bádat dále. Pokuste se jako Lukáš s Anežkou změřit hmotnost vyšuměného CO_2 ze sycené limonády a porovnejte ho s celkovou hmotností CO_2 uvedenou na etiketě lahve. Zkuste získat šuměním co nejvíce CO_2. Svou metodu měření důkladně popište, zaměřte se primárně na zachytávání a zjišťování hmotnosti vyšuměného CO_2.
Nápověda: Velký výtěžek CO_2 z limonády dostanete například tak, že do ní nasypete sůl.

[1] Velodrom je obvykle oválná cyklistická dráha s nakloněným povrchem uzpůsobeným pro jízdu ve vysokých rychlostech.

Úloha IV.V ... Sluneční družice ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček se jednoho dne zamyslel nad tím, jak Slunce září. Začal se o to zajímat, a tak si na internetu vyhledal něco o SDO družici. Družice SDO pozorující Slunce se nachází 36 000 km nad povrchem Země.

1. Solární panely SDO pokrývají plochu $S = 6{,}6\,\mathrm{m}^2$ kolmou k přicházejícímu záření ze Slunce. Jaký maximální zářivý výkon může SDO ze Slunce získávat?

2. Došlo k erupci a ze Slunce se odtrhlo plazma, které letělo přímo k družici rychlostí $v = 1\,500\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. O kolik procent se zkrátí případně prodlouží jeho pozorovaná vlnová délka oproti té původní?

3. Vypočítejte, za jak dlouho dorazí částice oblaku plazmatu k oběžné dráze Země.

Vzdálenost Země od Slunce je přibližně $r = 1{,}5{\cdot}10^{11}\,\mathrm{m}$ a zářivý výkon Slunce $L = 3{,}85{\cdot}10^{26}\,\mathrm{W}$.

Výfučtení: V hlavní roli Slunce

Slunce lidstvo už odpradávna fascinovalo. Je to naše nejbližší hvězda a vděčíme mu za současnou podobu života na Zemi, z galaktického pohledu ovšem nijak nevyniká. Právě jeho blízkost poskytla vhodné podmínky pro staletí soustavného pozorování, jež pomohlo odhalit některé z pro nás fundamentálně neobvyklých dějů a teoreticky nahlédnout pod pokličku ostatních, zhruba podobných, hvězd. Ve Výfučtení se vám pokusíme složité sluneční mechanismy přiblížit a podívat se, jak Zemi ovlivňují.

Struktura Slunce

Slunce je žhavá plynná koule tvořená převážně vodíkem (73 %) a heliem (25 %).[2] Při teplotách, které na Slunci panují, si však atomy vodíku ani helia neudrží všechny své elektrony u sebe – elektrony jsou totiž natolik rychlé, že se od jádra odtrhnou. Takové atomy nazýváme ionizované a plynu, který tvoří, říkáme plazma.[3] Sluneční fyzici znají vlastnosti plazmatu velmi dobře, proto dokáží určit, jak Slunce vypadá uvnitř, a rozdělit jej na několik vrstev.

Jádro

V jádře dosahuje plazma nejvyšších teplot (15 MK).[4] Vodíkové kationty (kladně nabité částice vodíku) zde mají takovou rychlost, že i přes odpudivé elektrické síly do sebe naráží a řetězcem reakcí se slučují na kationty helia – probíhá *termojaderná fúze*. Při ní se uvolňuje velké množství energie v podobě tepla a záření. Jako meziprodukty jaderných reakcí vznikají neutrina (velmi lehké elektricky neutrální částice, které s okolím skoro vůbec neinteragují a Slunce hned opouštějí) a pozitrony (opačné částice k elektronům se stejnými vlastnostmi i hmotností, ale

[2] Vlivem termojaderné fúze se složení z dlouhobého hlediska mění. Podíl vodíku klesá a roste množství helia.

[3] V češtině používáme rod střední pro fyzikální plazma, zatímco rod ženský pro krevní plazmu.

[4] V celém Výfučtení uvádíme teplotu v jednotkách kelvin (K) a v jeho násobcích, např. v megakelvinech (MK). Prakticky jde o Celsiovu stupnici posunutou o 273,15 °C níž. Bod tání vody 0 °C je tedy 273,15 K.

kladným nábojem), které když se s elektronem spojí, společně s ním zaniknou a vyzáří svou energii. Tímto Slunce „spaluje“ vlastní hmotu. Řečeno v číslech, Slunce každou sekundu přemění 700 milionů tun vodíku na helium, z čehož 4 miliony tun materiálu ztratí vyzářením energie. Hmotnost m na energii převádí slavný Einsteinův vzorec $E = mc^2$, kde $c \doteq 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je rychlost světla. Dosazením tedy zjistíme, že za sekundu Slunce zářením uvolní $E \doteq 3{,}6 \cdot 10^{26}$ J energie, jeho tzv. *zářivý výkon* je tedy $L \doteq 3{,}6 \cdot 10^{26}$ W.

Vrstva v zářivé rovnováze

Udělejme na chvíli odbočku. Záření se šíří jako vlna po malých kouscích energie, kvantech, neboli fotonech. Velikost této energie lze vyjádřit součinem Planckovy konstanty h a frekvence f, neboli kmitočtu, tedy počtem vrcholků vlny, které projdou daným bodem za jednotku času. Vzdálenost dvou vrcholků nejkratší pravidelně se opakující části vlny se nazývá vlnová délka λ, ta je pro každou vlnu specifická a podle ní rozlišujeme například barvy světla.

Fotony putující z jádra Slunce se na své cestě musí nejdříve prodrat hustou vrstvou plazmatu, což jim může zabrat řádově statisíce let. Zhruba po každém uraženém centimetru totiž narazí na volný elektron, který foton pohltí a vyzáří ve zcela náhodném směru. Jde o vrstvu v zářivé rovnováze: z jádra přijde zhruba tolik fotonů, kolik jich vrstvu stihne opustit.

Konvektivní vrstva

Nad vrstvou v zářivé rovnováze se nachází méně hustá konvektivní zóna, ve které dochází k přenosu energie z jádra nikoliv zářením, ale vzestupnými a sestupnými proudy, tj. *konvekcí*. Částice sluneční hmoty ohřáté na teplotu 2 MK se dostanou až k povrchu, kde vychladnou na „pouhé“ tisíce kelvinů a klesají zase zpátky do hlubin. Jejich přítomnost je zjevná na snímcích Slunce, kde rozeznáme zrnečnou strukturu, *granulaci*, patřící hřebenům proudů.

Jejich rychlost – cca $2\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ – byla určena pomocí Dopplerova efektu. Při relativním přibližování zdroje se totiž vlnová délka pozorovateli zdá kratší a mluvíme o *modrém posuvu*, při vzdalování se naopak jeví delší a mluvíme o *rudém posuvu*. Relativní rychlost zdroje a pozorovatele v souvisí s posunutím vlnové délky podle vztahu

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\,,$$

kde $\Delta\lambda$ vyjadřuje, o kolik se původní vlnová délka λ změnila. Veličiny $\Delta\lambda$ i v jsou kladné pro relativní přibližování a záporné pro vzdalování.

Ze školy možná víte, že při pohybu elektrického náboje vzniká magnetické pole, stejný princip funguje i zde. Navíc je podpořen nerovnoměrnou rotací Slunce. Nitro se totiž kolem své osy otáčí jako pevné těleso, podobně jako Země, ale ve vyšších vrstvách, včetně té konvektivní, trvá na rovníku jedna otáčka 25 dní, zatímco na pólech asi 35 dní. Důsledkem je složité, silné magnetické pole, jehož siločáry[5] vystupují vysoko nad povrch a tvoří smyčky – k nim se ještě vrátíme.

[5] Ve správné fyzikální terminologii se jedná o *magnetické indukční čáry*, což jsou uzavřené křivky orientované ze severního pólu magnetu do jižního. Můžeme je zviditelnit například nasypáním železných pilin do pole magnetu. Naopak siločáry jsou myšlené čáry, jejichž tečna ukazuje směr působící síly v daném poli.

Fotosféra

Když se fotony z jádra dostanou k povrchu Slunce, úzké vrstvě zvané fotosféra, mohou již odletět pryč do prostoru. My se u ní však na chvíli pozastavme. Fotony, které se oddělily od elektronů, mají různé vlnové délky, v některých však Slunce vyzařuje více než v jiných. To popisuje tzv. *Wienův posunovací zákon*, jenž svazuje teplotu *absolutně černého tělesa* s vlnovou délkou maxima jeho vyzařování. Absolutně černé těleso je ideální model tělesa, které všechno záření absorbuje a žádné neodráží a jehož intenzitu vyzařování ovlivňuje pouze jeho teplota, nikoliv chemické složení. Absolutně černé těleso vyzařuje nejintenzivněji na vlnové délce

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}\,,$$

kde $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m{\cdot}K}$ je Wienova konstanta[6] a T teplota tělesa v kelvinech. Slunce můžeme považovat za absolutně černé těleso, protože vzhledem k množství fotonů, které na různých vlnových délkách vyzařuje, má jeho odrazivost na rozložení intenzit jeho spektra jen velmi malý vliv. Doposud teplota plazmatu klesla až na $T = 5\,800\,\mathrm{K}$, Slunce tedy nejintenzivněji vyzařuje na vlnových délkách okolo

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{5\,800}\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{nm}\,.$$

Výsledek zhruba odpovídá vlnové délce zeleného světla. Slunce však vyzařuje v celém viditelném spektru, vnímáme jej tedy jako bílé. Kvůli zemské atmosféře, která rozptyluje světlo, se nám na Zemi může jevit, že barva Slunce se v průběhu dne mění (např. večer se jeví načervenale).

Pro zajímavost zmiňme, že na začátku spočítaný zářivý výkon Slunce můžeme pro absolutně černá tělesa vyjádřit i na základě Stefanova–Boltzmannova zákona pomocí povrchové teploty a poloměru Slunce využitím vzorce

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,,$$

kde $\sigma \doteq 5{,}7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ je Stefanova–Boltzmannova konstanta a $4\pi R^2$ je povrch koule. Dosazením se přesvědčíme, že si výsledky skutečně zhruba odpovídají, tj. $L \doteq 3{,}9 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$.

Atmosféra Slunce

Konče fotosférou, mluvíme dále o atmosféře Slunce. Její hustota se sice vyrovná laboratornímu vakuu, procesy v ní přesto přímo ovlivňují Zemi. Povrch Slunce obaluje *chromosféra* a nad ní se nachází *koróna*. Ani jednu vrstvu bychom bez využití speciálních filtrů družic neviděli, protože je za normálních okolností přesvítí fotosféra. Při zatmění Slunce lze korónu pozorovat i okem, stejného principu využívají pro pozorování Slunce také mnohé satelity.

Magnetické pole Slunce

Sluneční magnetické pole je, oproti zemskému, dvojího původu. Jedno globální, s póly poblíž heliografických (zeměpisných) pólů, má zhruba stejnou sílu a charakter jako to zemské. Druhé, lokální, je asi stokrát silnější. Přesné vysvětlení jejich vzniku stále neexistuje, avšak jak jsme dříve zmínili, souvisí s rozdíly v pohybu elektronů na rozhraní dvou vrstev.

Plazma reaguje na silné magnetické pole. Na nabité částice pohybující se v homogenním magnetickém poli působí síla, která je nutí magnetické siločáry spirálově obkružovat. Elektrony

[6] Tuto konstantu lze odvodit z fundamentálních konstant a její hodnotu tak známe přesně.

a ionty tímto zůstávají spjaty se siločárami Lorentzovou silou[7] a hovoříme o tzv. *zamrzlém magnetickém poli v plazmatu.* Plazma a siločáry se tedy navzájem ovlivňují, přičemž ve fotosféře převažuje vliv energie plazmatu kvůli sluneční rotaci, naopak v atmosféře převládá magnetické pole. V důsledku rotace Slunce se siločáry namotávají po slunečním obvodu až do té míry, že vznikne nové, opačně orientované magnetické pole, které to staré vyruší. Globální i lokální magnetické pole se přepóluje, k čemuž pravidelně dochází jednou za zhruba 11 let.

Sluneční skvrny

Elektrony a ionty krouží kolem siločar vlivem Lorentzovy síly, což omezuje příčný pohyb plazmatu vůči magnetickým siločarám. Magnetické pole takto potlačuje tepelné proudění plazmatu. Proto se ve fotosféře na místech, kde z povrchu vystupuje silné lokální magnetické pole, nachází chladnější ($T \approx 4\,000\,\mathrm{K}$) plyn, jehož okolí jej přesvítí, a nám se tudíž jeví jako tmavá pole, která mohou být velikostně srovnatelná s planetou Zemí. Jde o *sluneční skvrny.* Sluneční skvrny se obvykle vyskytují v párech opačných polarit – z jednoho místa magnetické siločáry vystupují, do druhého vchází. Siločáry tedy tvoří oblouk, magnetickou smyčku, na obou koncích „ukotvenou“ ve slunečních skvrnách a pronikající až do koróny. Rozdělíme-li skvrny párované do dvojic na vedoucí a následné, zjistíme, že na severní polokouli mají vedoucí skvrny stejnou polaritu, zatímco na jižní polaritu opačnou a vždy za přibližně 11 let se tyto polarity obrátí. Během tohoto období slunečních skvrn přibývá a vyskytují se blíže rovníku – nastává *sluneční maximum*, ke konci jejich počet opět klesne do přibližně původního stavu.

Erupce

Pohyby slunečních skvrn (například kvůli rotaci Slunce) ovlivňují tvar v nich ukotvených magnetických smyček. Když se dvě opačně orientované siločáry k sobě přiblíží, může dojít k jejich přepojení do energeticky výhodnější konfigurace smyček. Nastává erupce, prudký výbuch, během nějž se za pár desítek sekund uvolní obrovské množství energie (řádově $10^{25}\,\mathrm{J}$), jež ohřeje koronální plazma a urychlí okolní elektrony. Ve většině případů však není energie plazmatu dostatečná na překonání magnetického pole. V těchto situacích plazma ze Slunce vytryskne, ale magnetické pole jej stočí ve smyčce zpět do fotosféry. Tomuto jevu se říká *sluneční protuberance.*

Sluneční vítr

Přepojením siločar může dojít k *výronu koronální hmoty*, kdy se oblak plazmatu s magnetickým polem úplně odtrhne a poměrně velkou rychlostí unikne ze Slunce.

Proudy ionizovaných částic však ze Slunce odlétají neustále, nejen jako výrony koronální hmoty, které jsou pouze speciálním případem *slunečního větru.* Rozeznáváme dva druhy slunečního větru, *rychlý* a *pomalý.* Rychlý sluneční vítr pochází z míst, kde vystupují magnetické siločáry ze Slunce do meziplanetárního prostoru. Plazma po nich může jednoduše putovat pryč ze Slunce rychlostí okolo $800\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Naopak pomalý sluneční vítr přichází z koronálních smyček. Jeho částice mají typickou rychlost $400\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ a po dalším urychlení mohou uniknout z vlivu Slunce.

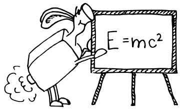
Kvůli působení částic slunečního větru na proudy prachu a plynu míří ohony komet od Slunce. Když ionty narazí na magnetické pole Země, jsou buď odkloněny a putují dále do prostoru, nebo spirálově dokrouží až k magnetickým pólům Země, které je přitahují. Tady

[7] Lorentzova síla je síla, která působí na pohybující se nabité částice (jako jsou elektrony nebo ionty) v magnetickém, případně i v elektrickém, poli.

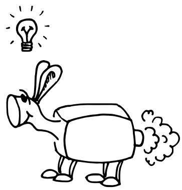
se srazí s molekulami vzduchu, předají jim energii, jež se následně vyzáří, což pozorujeme jako polární záři. V období vyššího slunečního maxima pronikne do horní vrstvy atmosféry Země více částic slunečního větru, a proto můžeme polární záři vidět i v nižších geografických šířkách (např. i v Česku). Má-li sluneční vítr dostatečnou sílu, může narušit ochrannou zemskou magnetosféru a tím vyvolat vysoké elektrické proudy v pozemských vodičích, které v nejhorším případě vyhoří. Poškodit se můžou i satelity mimo zemské magnetické pole, například se jim více opotřebovávají sluneční panely. Snaha o předcházení náhlým velkoplošným selháním techniky vedla ke vzniku oboru *kosmického počasí*, jež se zabývá předpovědí dějů na Slunci.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Michaela Urbanová
michaela.urbanova@vyfuk.org



Řešení III. série



Úloha III.1 ... Sbohem, Země

5 bodů; průměr 4,32; řešilo 47 studentů

Když se rychle točíte na kolotoči a ten se pod vámi prudce zastaví, cítíte, jak pokračujete dál, a nedržíte-li se dost pevně, můžete z něj snadno spadnout.

Pojďme se podívat na trochu větší kolotoč – na Zemi. Kdyby se pod vámi najednou zastavila Země (přestala se otáčet kolem své osy), měli byste dostatečnou rychlost na to, abyste z ní odletěli?

Pojďme se nejprve na problém podívat prostou úvahou. Při otáčení Země se sice vzhledem k povrchu nikam nepohybujeme, stále ale obíháme kolem její osy úplně stejně jako například družice. Zastaví-li se Země, bude nás přitahovat stejnou gravitační silou jako předtím. Po zastavení Země budeme dále pokračovat v pohybu stejnou rychlostí, akorát se již nebudeme pohybovat spolu se Zemí, danou rychlost tedy budeme mít vůči zemskému povrchu. Abychom ze Země odletěli, museli bychom z ní odlétávat už při její obvyklé rychlosti, protože na našem pohybu kolem její osy by se zastavením Země nic nezměnilo. Jediný výsledek zastavení naší planety by tedy bylo několik miliard rozbitých nosů.

Pojďme se na to, jak moc bychom se proletěli, podívat číselně. Nejhůř by dopadli lidé na rovníku, všichni ostatní obíhají zemskou osu po menších kružnicích, tím pádem i menší rychlostí. Obvod Země na rovníku je asi $o \doteq 40\,000\,\mathrm{km}$. Člověk stojící na místě tuhle vzdálenost urazí jednou každých $t = 24\,\mathrm{h}$. Rychlost nejrychlejšího stojícího člověka na Zemi je tedy

$$v = \frac{o}{t} \doteq \frac{40\,000\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{h}} \doteq 1\,670\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \doteq 0{,}46\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

A přesně takovou rychlostí by se člověk proletěl, kdyby se pod ním najednou Země přestala otáčet. Ani půl kilometru za sekundu ale stále nestačí na opuštění Země. Na to by musel náš vzorový jedinec dosáhnout takzvané *první kosmické rychlosti*, ta činí celých $7{,}9\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Jak daleko od svého původního stanoviště by náš nebohý letec dopadl, už ponecháme čtenáři jako úkol.

Soňa Husáková
sona.husakova@vyfuk.org

Úloha III.2 ... Epipremnum neon

5 bodů; průměr 3,58; řešilo 346 studentů

Viktor si velice oblíbil jednu ze svých kytek, protože velmi dobře roste. Každý její nový list je o 20 % delší než ten předchozí. Pokud má současný poslední list délku 25 cm, kolik listů ještě musí vyrůst, aby ten největší měl délku alespoň půl metru? Za předpokladu, že všechny listy mají stejný tvar, kolikrát větší povrch bude mít tento největší list oproti tomu 25 cm dlouhému?

Jelikož se každý nový list zvětší o 20 % oproti předchozímu listu, můžeme si jeho délku zapsat jako násobek délky předchozího listu. Jestliže jeden list má délku l_0, a chceme ji zvýšit o 20 %, znamená to, že k původní délce přidáváme 20 % z ní samotné. Nový list tedy bude mít délku

$$l_1 = l_0 + 0{,}2 \cdot l_0 = 1{,}2 \cdot l_0\,.$$

Další list pak bude mít analogicky délku

$$l_2 = 1{,}2 \cdot l_1 = 1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot l_0) = 1{,}2^2 \cdot l_0\,.$$

Obecně délku n-tého listu můžeme napsat jako

$$l_n = 1{,}2 \cdot l_{n-1} = 1{,}2^n \cdot l_0\,,$$

kde l_0 je délka prvního listu a n je počet listů, které po něm přirostly.

Potřebujeme, aby délka nejdelšího listu byla alespoň 50 cm. Počet listů, které do té doby musí vyrůst, můžeme vyjádřit z předchozího vzorce pomocí logaritmu.

$$n = \log_{1{,}2} \frac{l_n}{l_0} = \log_{1{,}2} \frac{0{,}5}{0{,}25} \doteq 3{,}8\,.$$

Protože listy rostou jako celé jednotky, musí být n celé číslo. Výsledek tedy musíme zaokrouhlit nahoru. Z toho vyplývá, že musí vyrůst ještě 4 listy, aby ten největší měl délku alespoň půl metru.

Povrch roste s druhou mocninou délky.[8] Protože po 4 růstech bude délka $1{,}2^4$krát větší než původní délka, povrch se zvětší násobkem

$$(1{,}2^4)^2 = 1{,}2^8 \doteq 4{,}3\,.$$

Povrch nejdelšího listu bude tedy přibližně 4,3krát větší než povrch prvního listu.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

[8] Toto tvrzení platí obecně pro libovolné geometrické útvary. Pokud byste chtěli měnit délkový rozměr útvaru a ponechat tvar, zjistíte, že obsah nebo povrch daného útvaru roste s 2. mocninou délky, resp. jiné veličiny charakteristické pro rozměr útvaru (např. poloměr, výška, ...). Všimněte si toho například u čtverce ($S = a^2$), kruhu ($S = \pi r^2$), koule ($S = 4\pi r^2$), ...

Úloha III.3 ... Závody na orbitě

6 bodů; průměr 4,78; řešilo 101 studentů

V roce 2875 nejbohatší třída společnosti žije na oběžné dráze Země ve vesmírné stanici, která má tvar dokonalého tenkostěnného válce o vnitřním poloměru 5,0 km. *Stanice svou rotací kolem osy válce generuje přitažlivost (tzv. „umělou gravitaci“)* 1,0g. *Mezi oblíbenou zábavu vyšší třídy patří například automobilové závody. Během jízdy proti směru otáčení vesmírné stanice si však řidiči všímají, že se cítí trochu lehčí. Proč tomu tak je? Jakou rychlostí by musel závodník jet, aby se cítil lehčí přesně o polovinu?*

Stanice rotující s obvodovou rychlostí v generuje pro své obyvatele pocitově odstředivé zrychlení

$$a = \frac{v^2}{r}\,, \tag{1}$$

které podle zadání odpovídá $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^2}$. Musíme si uvědomit, že tímto zrychlením vyvolaná odstředivá síla je tzv. *nepravá* a vzniká naprosto přirozeně tím, že soustava, v níž je určitý obyvatel stanice statický, je tzv. *neinerciální* (neplatí zde 1. Newtonův zákon). Stanice tedy obíhá po kružnici a tudíž zrychluje vůči nějaké inerciální soustavě, např. hvězdnému pozadí. Abychom dokázali určit velikost této nepravé síly, musíme rychlost rotace stanice měřit vůči nějaké inerciální soustavě (tedy vůči nerotující soustavě), např. právě vůči hvězdnému pozadí.

Chceme-li pocitové zrychlení (1) snížit, musíme nějak snížit rychlost v měřenou vůči okolním hvězdám. Toho lze dosáhnout třeba jízdou automobilem proti směru rotace stanice. Jede-li závodník rychlostí v_a vůči povrchu stanice, sníží se jeho rychlost oběhu po kružnici oproti námi zvolené inerciální soustavě a generované zrychlení pak pro něj bude pouze

$$\frac{(v - v_\mathrm{a})^2}{r} = \frac{g}{2}\,,$$

jelikož požadujeme, aby toto zrychlení bylo polovinou zemského tíhového zrychlení.

Rovnici upravíme do tvaru

$$v_\mathrm{a} = v - \sqrt{\frac{gr}{2}}\,.$$

Ze vztahu (1) již víme, že $v = \sqrt{ar}$, kde $a = g$, tedy po dosazení můžeme psát

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{gr} - \sqrt{\frac{gr}{2}}\,.$$

Dosadíme hodnoty $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^2}$ a $r = 5\,000\,\mathrm{m}$.

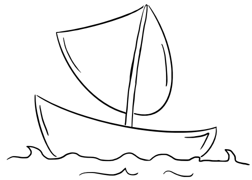
$$v_\mathrm{a} = \sqrt{9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 5\,000\,\mathrm{m}} - \sqrt{\frac{9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 5\,000\,\mathrm{m}}{2}} \doteq 230\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Aby se závodník cítil dvakrát lehčí, musel by jet rychlostí přibližně $230\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Michal Stroff
michal.stroff@vyfuk.org

Úloha III.4 ... Na vlnách

7 bodů; průměr 6,31; řešilo 105 studentů



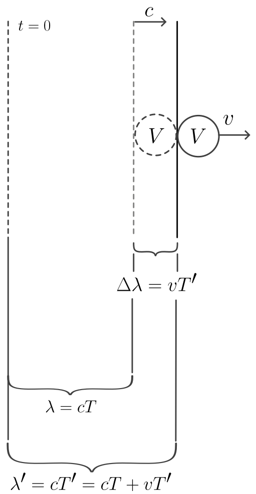
Výfuček ukotvil svou malou jachtu na širém moři, aby se mohl v klidu opalovat na přídi své lodě. Ihned po zakotvení však zjistil, že loď se výrazně houpe. Vcelku rychle se mu podařilo naměřit, jak se loď na vlnách pohupuje s frekvencí $f = 0{,}2\,\mathrm{Hz}$, ze které se mu začalo dělat špatně. Napadlo ho ale, že může vyplout ve směru šíření vln, aby frekvenci houpání snížil, a tím uklidnil svůj žaludek. Rozhodl se tak učinit a vyrazil s lodí rychlostí $v = 15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ po směru šíření vln. Jestliže vrcholy vln putují po moři rychlostí $c = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, na jakou frekvenci se houpání Výfučkovy jachty snížilo?

Situaci si můžeme představit tak, že se Výfuček nachází daleko od nějakého zdroje vln a vlny, které na své lodi vnímá, jsou navzájem rovnoběžné[9] jako na obrázku 2. Pokud by Výfuček se svou jachtou zůstal zakotvený, vnímal by, že vlny na jeho loď naráží s konstantní frekvencí $f = 0{,}2\,\mathrm{Hz}$, což odpovídá jedné vlně každých 5 sekund. V takovém případě bychom mohli spočítat vlnovou délku λ (vzdálenost mezi vrcholy dvou za sebou jdoucích vln) jako

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}\,,$$

kde c je rychlost šíření vln po hladině a T perioda vlnění.

Když ale Výfuček vyjede se svou jachtou na moře po směru vln, bude se tedy pohybovat směrem od zdroje vlnění, frekvence f', se kterou vlny narážejí do jeho lodě, se změní. Po krátkém zamyšlení nás intuitivně napadne, že frekvence vln f' bude menší než původní frekvence f. Dá se říci, že Výfuček po vyplutí částečně utíká vlnám za sebou a ty do něj narážejí pomaleji, a tudíž méně často. Pojďme si tento jev ukázat matematicky.



Obrázek 2: Znázornění šíření vln na hladině a Výfučkova pohybu

[9] Na „tvaru“ vln při počítání této úlohy nezáleží. Pro jednoduchost jsme vybrali rovnoběžné vlny.

Pro jednoduchost předpokládejme, že v čase $t = 0$, kdy Výfuček se svou jachtou vyplul, do jeho lodi zrovna narazila vlna. Další vlna se do místa, kde se Výfuček nacházel v čase $t = 0$, dostane za čas odpovídající periodě vlnění T a urazí při tom vzdálenost rovnou vlnové délce vlnění λ. Za tento čas ale Výfuček na své jachtě urazí vzdálenost vT, a tím pádem už nebude na stejném místě. Jelikož vlna také musí urazit tuto vzdálenost „navíc", dorazí k němu později oproti situaci, ve které se Výfuček nepohyboval. Z toho vyplývá, že vlna dorazí k lodi za delší čas T' místo původního času T.

Nyní můžeme vyjádřit celkovou dráhu λ', kterou vrchol vlny urazí, než narazí do lodi, jako součet původní vlnové délky λ a vzdálenosti $\Delta\lambda = vT'$, kterou Výfuček na své jachtě urazí během času T'.

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + vT'$$

Obě délky (λ a λ') si můžeme rozepsat jako součin rychlosti šíření vln po hladině a času, za který vlna danou délku urazila. Touto úpravou získáme následující vyjádření předchozí rovnice.

$$cT' = cT + vT'$$

Když využijeme toho, že perioda odpovídá převrácené hodnotě frekvence, a následně si z rovnice vyjádříme frekvenci f', získáme následující vztah mezi původní frekvencí narážení vln f a frekvencí f', se kterou bude vlny chytat Výfuček pohybující se na své jachtě po směru šíření vln rychlostí v.

$$\frac{c}{f'} = \frac{c}{f} + \frac{v}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{c - v}{c} f$$

Drobnou úpravou převedeme předchozí odvozený vztah do tvaru

$$f' = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f\,,$$

se kterým se můžete setkat i v učebnicích fyziky, neboť se jedná o vztah popisující změnu frekvence vlnění při vzájemném pohybu zdroje a místa pozorování vlnění. Tomuto úkazu se říká Dopplerův jev.

I přesto, že se Dopplerův jev nejčastěji demonstruje na změně frekvence zvuku např. projíždějící sanitky či v relativistické podobě na změně frekvence (vlnové délky) elektromagnetického vlnění – světla, vztahuje se na všechny typy vlnění, tedy i na mechanické vlnění – v této úloze vlny na hladině moře.

Nyní již k samotnému výpočtu výsledné frekvence. Dosadíme hodnoty všech veličin ze zadání.

$$f' = \left(1 - \frac{15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}{20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}\right) \cdot 0{,}2\,\mathrm{Hz} = 0{,}05\,\mathrm{Hz}$$

Potom, co Výfuček se svou lodí vyjel po směru šíření vln, se frekvence vln snížila na $f' = 0{,}05\,\mathrm{Hz}$, což odpovídá jedné vlně každých 20 sekund.

Vojtěch Kubrycht
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Úloha III.5 ... Těžší batoh

8 bodů; průměr 5,52; řešilo 69 studentů

Aleš sice rád chodí po horách, ale to je často spojené s nošením těžkého batohu, což až tak v oblibě nemá. Napadlo ho však, že by při další cestě mohl zkusit na batoh připevnit balón naplněný vodíkem, který by mu mohl tuto nepříjemnost pomoct vyřešit. Protože nerad dělá unáhlená rozhodnutí, rozhodl se problém nejprve důkladně propočítat. Předpokládejte, že při chůzi Aleš vyvíjí konstantní výkon $P_0 = 70\,\mathrm{W}$, váží $m = 70\,\mathrm{kg}$ a bez batohu chodí po rovině rychlostí $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

1. *Aleš si uvědomil, že sílu, kterou je třeba při chůzi překonávat, lze poměrně dobře modelovat jako obyčejnou třecí sílu s neznámým koeficientem smykového tření f. Jakou rychlostí se bude Aleš pohybovat, pokud ponese po rovině batoh o hmotnosti $m_\mathrm{B} = 10\,\mathrm{kg}$?*

2. *Předpokládejte nyní, že si Aleš na tento batoh připevní kulový balón velký tak, aby jeho vztlaková síla vyvážila tíhu batohu. (Hmotnost látky, ze které je balón vyroben, a vodíku, kterým je naplněn, je zanedbatelná.) Pro jaký rozsah rychlostí bude výhodnější (tj. bude vyžadovat menší výkon) chodit po rovině s balónem než bez něj?*

3. *Pokud si chce Aleš zachovat svůj výkon při chůzi P_0, půjde po rovině rychleji s balónem, nebo bez něj? Uvažujte, že na balón působí Newtonův odpor, který je výrazně vyšší než odpor vzduchu působící na Aleše.*

Nápověda: *Můžeme prozradit, že k úloze je potřeba si najít hustotu vzduchu a Newtonův odporový koeficient balónu (koule). Nezapomeňte citovat použité zdroje!*

1. K vyřešení první podúlohy využijeme vztah

$$P = Fv\,,$$

který určuje výkon P potřebný k překonávání síly F při pohybu rychlostí v proti směru působení síly. V našem případě se jedná o Aleše, který jde s batohem neznámou rychlostí v a vyvíjí konstantní výkon $P_0 = 70\,\mathrm{W}$. Se sílou, kterou musí překonávat, lze dle zadání počítat jako se silou třecí, která je dána vztahem

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{N}\,,$$

kde f je koeficient tření a F_N tzv. *normálová síla*, tedy síla působící kolmo na podložku. Zde se jedná jednoduše o tíhovou sílu, do které ovšem musíme započítat jak hmotnost Aleše m, tak i batohu m_B.

$$F_\mathrm{N} = (m + m_\mathrm{B})g$$

Vypočítáním třecí síly a dosazením do vztahu pro výkon dostáváme

$$v = \frac{P_0}{f(m + m_\mathrm{B})g}\,,$$

kde jsme vyjádřili hledanou rychlost v. Abychom úlohu vyřešili, potřebujeme ještě určit koeficient f.

K tomu využijeme znalosti, jak rychle Aleš chodí bez batohu. V tom případě máme totiž jako neznámou jen koeficient tření f. Jedinou změnou při výpočtu je, že tíhová síla působící na Aleše bez batohu je jen $F_\mathrm{N} = mg$. Opět tedy vypočítáme třecí sílu a dosadíme do vztahu pro výkon, čímž dostaneme rovnici

$$P_0 = fmgv_0\,, \tag{2}$$

kde $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ je Alešova rychlost při chůzi po rovině bez batohu. Nyní nám stačí vyjádřit z této rovnice f a dosadit do vztahu pro rychlost chůze s batohem, z čehož dostáváme

$$v = \frac{m}{m + m_\mathrm{B}} v_0 \doteq 3{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Pro zjednodušení řešení druhé podúlohy také uvádíme vypočtenou číselnou hodnotu koeficientu $f \doteq 0{,}082$, která byla vypočtena z rovnice (2).

2. Zde opět potřebujeme vztah pro výkon. Nyní ovšem bude působit proti chůzi nejen třecí síla F_t způsobená tíhovou silou, ale také Newtonova odporová síla F_o.

$$P_2 = (F_\mathrm{t} + F_\mathrm{o})v$$

Tíhová síla působící na batoh je vyrovnána vztlakovou silou balónu, tím pádem třecí síla je $F_\mathrm{t} = fmg$.

Newtonova odporová síla je daná vztahem

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} S_\mathrm{B} v^2\,,$$

kde $C = 0{,}5$ je odporový koeficient koule, $\rho_\mathrm{vz} = 1{,}23\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ hustota vzduchu, S_B průřez balonu a v rychlost pohybu. Průřez lze zjistit jako $S_\mathrm{B} = \pi r_\mathrm{B}^2$, kde r_B je poloměr balónu, který ale zatím neznáme. Můžeme ho vypočítat díky znalosti, že vztlaková síla balónu F_vz vyrovná tíhu batohu[10].

$$F_\mathrm{vz} = F_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} g$$

Vztlaková síla je dána vztahem

$$F_\mathrm{vz} = V_\mathrm{B} \rho_\mathrm{vz} g\,.$$

Zde V_B je objem balónu, který je daný vzorcem pro objem koule

$$V_\mathrm{B} = \frac{4}{3}\pi r_\mathrm{B}^3\,.$$

Kombinací předchozích tří rovnic můžeme vypočítat poloměr balónu jako

$$\frac{4}{3}\pi r_\mathrm{B}^3 \rho_\mathrm{vz} g = m_\mathrm{B} g \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{B} = \sqrt[3]{\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}}}\,.$$

Nyní můžeme také spočítat průřez balónu

$$S_\mathrm{B} = \pi \left(\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}}\right)^{2/3}\,,$$

[10] Zde dle zadání zanedbáváme tíhu vodíku, kterým je balón naplněn.

a tedy i Newtonovu odporovou sílu

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} \pi \left(\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3} v^2 \,.$$

Konečně máme kompletní vztah pro výkon

$$P_2 = \left[mgf + \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} \pi \left(\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3} v^2 \right] v \,. \tag{3}$$

Nás konkrétně zajímá, kdy (pro které rychlosti) je výhodnější chodit s balónem. Tedy kdy je tento výkon menší než ten, který vyžaduje chůze bez balónu. Ten, jak již víme, je dán vztahem

$$P_1 = (m + m_\mathrm{B}) g f v \,.$$

Všechny rychlosti, které takovou podmínku splňují, nalezneme jako řešení nerovnice $P_1 > P_2$, již můžeme upravit na

$$\left[m_\mathrm{B} g f - \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} \pi \left(\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3} v^2 \right] v \; > 0 \,.$$

Jelikož úloha dává smysl pouze pro kladnou rychlost $v > 0$, zajímá nás, kdy je závorka kladná. Je celkem snadné určit kritickou (hraniční) rychlost $\pm v_\mathrm{c}$, pro kterou nastane rovnost obou členů v závorce a ta se tak stane nulovou.

$$\pm v_\mathrm{c} = \pm \sqrt{\frac{2 m_\mathrm{B} g f}{C \rho_\mathrm{vz} \pi}} \sqrt[3]{\frac{4\pi\rho_\mathrm{vz}}{3 m_\mathrm{B}}} \doteq \pm 2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq \pm 8{,}3\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \,.$$

Nyní si již stačí rozmyslet, že závorka bude kladná pro $v \in (-v_\mathrm{c}, v_\mathrm{c})$. Uvážíme-li, že úloha fyzikálně dává smysl pouze pro $v > 0$, dostáváme výsledek. Chůze s balónem bude vyžadovat menší výkon pro rozsah rychlostí $v \in (0, v_\mathrm{c})$.

3. K vyřešení této úlohy bychom teoreticky mohli vypočítat Alešovu rychlost při chůzi s balónem a porovnat ji s rychlostí bez balónu vypočtenou v první podúloze. To je ale složité, neboť bychom museli vyřešit rovnici (3) vzhledem k rychlosti v, což je kubická rovnice.

   Můžeme však postupovat i jinak a jednodušeji. Z první podúlohy víme, že při výkonu P_0 je Alešova rychlost bez balónu $v = 3{,}94\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Z řešení druhé podúlohy zase víme, že tato rychlost spadá do rozmezí rychlostí, pro které chůze s balónem vyžaduje menší výkon. Navýšením výkonu na původní hodnotu P_0 bychom rychlost zvětšili.[11] Z toho plyne, že při výkonu P_0 půjde Aleš rychleji s balónem než bez něj.

Aleš Opl
`ales.opl@vyfuk.org`

[11] To je buď jasné intuitivně, nebo si uvědomíme, že výkon daný rovnicí (3) je rostoucí funkcí rychlosti, a tedy i rychlost (inverzní funkce) je rostoucí funkcí výkonu.

Úloha III.E ... Stínová

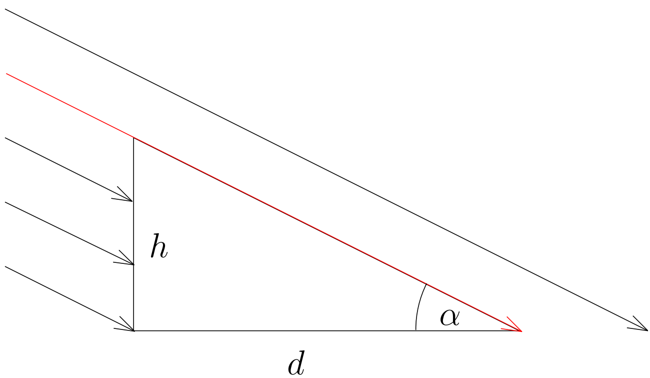
8 bodů; průměr 4,71; řešilo 78 studentů

Výfuček při večerní procházce pozoroval svůj stín. Všiml si, že se délka stínu mění podle úhlu, pod jakým na něj dopadá světlo z lampy. Hned si také rozmyslel, jakým způsobem délka stínu závisí na úhlu, pod nímž lampa svítí vůči zemské rovině.

Změřte závislost délky stínu předmětu na úhlu, pod kterým na něj svítíte. Stejně jako Výfuček také nalezněte funkci, která ji popisuje, a zdůvodněte, proč ji takto popisuje (například vhodným nákresem). Naměřené hodnoty následně vyneste do grafu a zkuste je danou funkcí proložit.

Teorie

Stín předmětu, na nějž dopadá světlo pod úhlem α, ohraničují paprsky dotýkající se jeho okrajů. Výška objektu h spolu s délkou stínu d pak tvoří odvěsny pomyslného pravoúhlého trojúhelníku s vnitřním úhlem α jako na obrázku 4. Intuitivně jsme schopni odhadnout, že se zmenšujícím se úhlem α stín roste, ovšem k přesnému popisu závislosti musíme využít goniometrickou funkci *tangens*.[12]



Obrázek 3: Nákres dopadajících rovnoběžných paprsků na předmět

V pravoúhlých trojúhelnících platí, že hodnota $\operatorname{tg}\alpha$ odpovídá poměru délky *protější* ku *přilehlé* odvěsně k úhlu α. V našem případě tedy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d}\,.$$

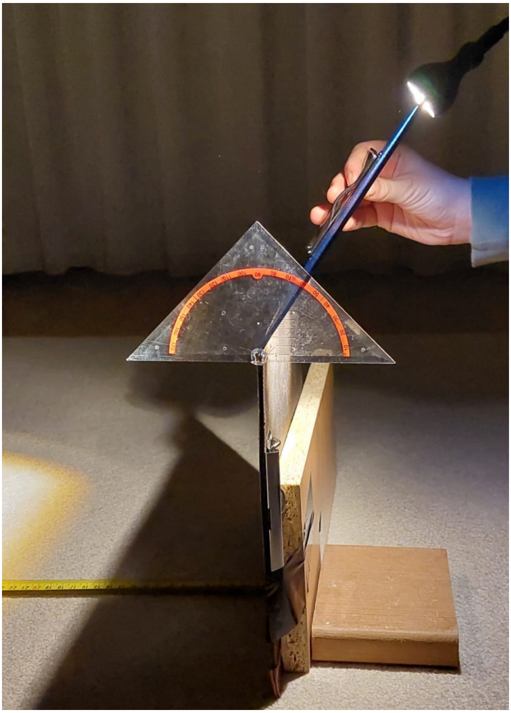
Číselnou hodnotu výrazu $\operatorname{tg}\alpha$ zjišťujeme pomocí kalkulačky stisknutím tlačítka „tan“ nebo „tg“ a zadáním velikosti úhlu. Jediné, na co si musíme dávat pozor, je, abychom měli kalkulačku nastavenou na stupně,[13] pro kontrolu byste na displeji měli vidět písmeno „D“ či skupinu pís-

[12] Funkce přiřazuje vstupní hodnotě (zde velikosti úhlu α) nějaké jedno číslo (podíl délek odvěsen pravoúhlého trojúhelníku).

[13] Existují totiž i jiné jednotky úhlu, např. *radiány* nebo *gradiány*, které mnoho kalkulaček také umí používat.

men „DGR“ nebo „DEG“ z anglického *degree*. Vyjádřením vzdálenosti d získáme vzorec pro závislost délky stínu na úhlu α dopadajícího světla jako funkci

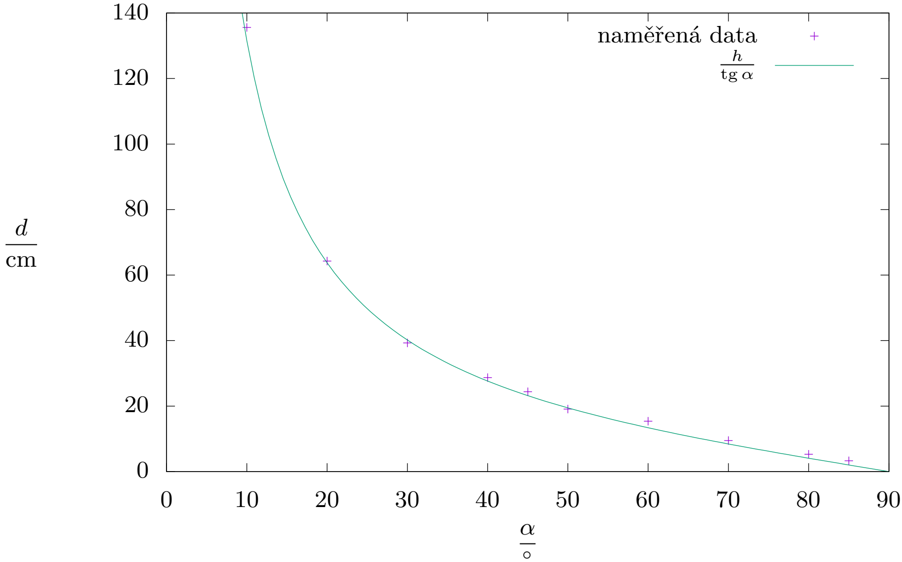
$$d = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}\,. \tag{4}$$



Obrázek 4: Aparatura pro určování délky stínu

Měření

Jako objekt jsme použili tenkou svisle postavenou desku s výškou 23,2 cm. Kolmo k ní jsme na zemi rozvinuli metr a k její horní podstavě připevnili úhloměr. K úhloměru jsme přiložili úzkou podložku se svítilnou se středem v rovině podložky. Podložku se svítilnou jsme otáčeli podle hrany vrchní podstavy stojící desky, během čehož jsme z úhloměru resp. metru odečítali úhel naklonění resp. délku stínu. Experiment jsme provedli pro každý úhel třikrát. Aritmetické průměry tří hodnot pro každé měření jsme zaznamenali do tabulky 1. Tyto hodnoty jsme následně zanesli do grafu 5 a proložili je funkcí (4).



Obrázek 5: Závislost délky stínu na úhlu nasvícení

n	$\frac{\alpha}{\circ}$	$\frac{d}{\mathrm{cm}}$	$\frac{h/\operatorname{tg}\alpha}{\mathrm{cm}}$
1	10	135,6	131,6
2	20	64,3	63,7
3	30	39,3	40,2
4	40	28,7	27,6
5	45	24,4	23,2
6	50	19,1	19,5
7	60	15,4	13,4
8	70	9,5	8,4
9	80	5,3	4,1
10	85	3,3	2,0

Tabulka 1: Aritmetický průměr naměřených délek stínu pro daný úhel α v porovnání s teoretickou hodnotou (zaokrouhlenou na desetiny)

Diskuze a závěr

Naměřené hodnoty se od vypočítaných lišily zhruba o 1 cm–2 cm. To je dáno především technickými limity sestavené aparatury, např. nepřesným odečítáním sklonu či různoběžností paprsků svítilny, které způsobují rozostření okraje stínu.

Michaela Urbanová
michaela.urbanova@vyfuk.org

Úloha III.V ... Potápěčská

7 bodů; průměr 5,04; řešilo 78 studentů

Výfuček si chtěl vyzkoušet potápění v moři. Celý nadšený se pustil do připravování výstroje. Rád by si ale svůj ponor pořádně naplánoval a propočítal, aby nedošlo k problémům a on se mohl zcela uvolnit při sledování podmořského života.

1. *Uvědomil si, že kvůli místu, ve kterém se chce potápět, stráví téměř celý svůj ponor v konstantní hloubce $h = 15\,\mathrm{m}$. Na ponor má Výfuček k dispozici jednu 12l láhev naplněnou vzduchem o počátečním tlaku $p_\mathrm{p} = 190\,\mathrm{bar}$. Dále si také změřil, že jeho spotřeba vzduchu na hladině při lehké fyzické námaze je $Q = 30\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$. Pomozte Výfučkovi spočítat, kolik času před zahájením výstupu může pod hladinou strávit, pokud si na bezpečný výstup chce v lahvi nechat tlak $p_\mathrm{r} = 70\,\mathrm{bar}$.*

2. *Další věcí, na kterou musí Výfuček před ponorem myslet, je závaží, konkrétně jak těžké bude potřebovat. Výfuček si vzpomněl, že když se naposledy potápěl ve svém oblíbeném sladkovodním jezeře s hustotou vody $\rho_1 = 997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, stačilo mu pro správné vyvážení mít na opasku $m_\mathrm{o} = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ olova. Jelikož se Výfuček tentokrát chystá potápět ve slané vodě s hustotou $\rho_2 = 1\,025\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, bude tato hmotnost odlišná. Určete, kolik kg závaží bude muset na opasek přidat nebo kolik bude muset z opasku odebrat, aby byl vyvážený ve slané vodě. Uvažujte, že Výfuček váží $m_\mathrm{v} = 40{,}0\,\mathrm{kg}$. Hustota olova činí přibližně $\rho_\mathrm{o} = 11\,300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.*

1. Množství vzduchu, které Výfuček bude mít k dispozici na hladině, vypočítáme pomocí Boyle-Marriotova zákona. Protože si Výfuček chce na výstup nechat rezervu $p_\mathrm{r} = 70\,\mathrm{bar}$, nebudeme ji započítávat do počátečního tlaku p_p. Celkový objem vzduchu[14], který bude mít Výfuček k dispozici na ponor a pobyt pod hladinou, bude

$$V_\mathrm{c} = V_\mathrm{l}\frac{p_\mathrm{p} - p_\mathrm{r}}{p_\mathrm{a}} = 12 \cdot \frac{190 - 70}{1}\,\mathrm{l} = 1\,440\,\mathrm{l}\,,$$

kde V_l je objem lahve a p_a je tlak na hladině vody, tedy atmosferický tlak (1 bar).

Jak víme, vzduch, který dýcháme, musí mít stejný tlak jako okolí. Když se tedy ponoříme do hloubky $h = 15\,\mathrm{m}$, okolní tlak se zvýší z 1 baru na 2,5 bar, protože tlak se zvyšuje o cca 1 bar každých 10 m vodního sloupce. Naše spotřeba vzduchu z daného objemu V_c se tedy navýší zhruba 2,5krát, čili bude

$$Q_\mathrm{c} = 2{,}5Q = 75\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}\,.$$

[14] Vzduch přepočítáváme na objem o tlaku 1 bar pro následné zjednodušení výpočtu spotřeby.

Pokud se Výfuček chce potápět do hloubky $h = 15\,\mathrm{m}$, kde má spotřebu vzduchu $Q_\mathrm{c} = 75\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$ a má k dispozici $V_\mathrm{c} = 1\,440\,\mathrm{l}$, bude moct být pod vodou před zahájením svého výstupu

$$t = \frac{1\ 440}{75}\ \mathrm{min} \doteq 19\,\mathrm{min}\,.$$

2. Aby byl Výfuček správně vyvážený, musí se rovnat vztlaková a tíhová síla, které na něj působí. Obě tyto síly budu působit jak na Výfučka samotného, tak i na jeho závaží – olovo, které má na opasku. Platí tedy

$$(m_\mathrm{v} + m_\mathrm{o})g = (V_\mathrm{v} + V_\mathrm{o})\rho_1 g\,,$$

kde V_v, resp. V_o je objem Výfučka, resp. olova, které má na svém opasku ve sladké vodě, o hustotě ρ_1.

Pokrácením tíhového zrychlení g získáme náležitý tvar

$$m_\mathrm{v} + m_\mathrm{o} = (V_\mathrm{v} + V_\mathrm{o})\rho_1\,.$$

Pokud Výfuček chce být dobře vyvážen i ve slané vodě, musí platit stejná rovnost

$$m_\mathrm{v} + m_\mathrm{o}' = (V_\mathrm{v} + V_\mathrm{o}')\rho_2\,,$$

kde m_o', resp. V_o' je hmotnost, resp. objem olova, které musí Výfuček na svém opasku mít ve slané vodě o hustotě ρ_2.

Zajímá-li nás rozdíl hmotností m_o' a m_o, musíme si je z předchozích vztahů vyjádřit. Za tímto účelem vyjádříme objemy V_o' a V_o jako podíl příslušné hmotnosti a hustoty olova ρ_o.

$$m_\mathrm{v} + m_\mathrm{o} = \left(V_\mathrm{v} + \frac{m_\mathrm{o}}{\rho_\mathrm{o}}\right)\rho_1$$

$$m_\mathrm{v} + m_\mathrm{o}' = \left(V_\mathrm{v} + \frac{m_\mathrm{o}'}{\rho_\mathrm{o}}\right)\rho_2$$

Několika úpravami si vyjádříme Výfučkem použité hmotnosti olova v obou prostředích.

$$m_\mathrm{o} = \frac{V_\mathrm{v}\rho_1 - m_\mathrm{v}}{1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_\mathrm{o}}}$$

$$m_\mathrm{o}' = \frac{V_\mathrm{v}\rho_2 - m_\mathrm{v}}{1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}}$$

Z první rovnice si vyjádříme Výfučkův objem V_v jako

$$V_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{v} + m_\mathrm{o}}{\rho_1} - \frac{m_\mathrm{o}}{\rho_o}\,.$$

Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice a výsledek upravíme.

$$m_\mathrm{o}' = \frac{m_\mathrm{v}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) + m_\mathrm{o}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \dfrac{\rho_2}{\rho_o}\right)}{1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}}$$

Nyní od hmotnosti m_o' odečteme hmotnost m_o.

$$m_\mathrm{o}' - m_\mathrm{o} = \frac{m_\mathrm{v}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) + m_\mathrm{o}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \dfrac{\rho_2}{\rho_o}\right)}{1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}} - \frac{m_\mathrm{o}\left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}\right)}{1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}}$$

$$m_\mathrm{o}' - m_\mathrm{o} = \frac{m_\mathrm{v}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) + m_\mathrm{o}\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - \dfrac{\rho_2}{\rho_o} + \dfrac{\rho_2}{\rho_o} - 1\right)}{1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}} = \frac{(m_\mathrm{o} + m_\mathrm{v})\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)}{1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_\mathrm{o}}}$$

Nyní už nám zbývá jen dosadit číselné hodnoty jednotlivých veličin ze zadání.

$$m_\mathrm{o}' - m_\mathrm{o} = \frac{(3{,}0\,\mathrm{kg} + 40{,}0\,\mathrm{kg})\left(\dfrac{1\,025\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}{997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}} - 1\right)}{1 - \dfrac{1\,025\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}{11\,300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}} \doteq 1{,}3\,\mathrm{kg}$$

Vidíme, že nám vyšla kladná hodnota. Hmotnost olova, kterou musí Výfuček použít ve slané vodě m_o' je tedy větší než hmotnost olova, které mu stačilo ve vodě sladké. Výfuček si tak na svůj opasek musí přidat 1,3 kg olova navíc, aby byl při potápění ve slané vodě správně vyvážený.

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Vojtěch Kubrycht
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na `https://vyfuk.org`.

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	8	8	7	**46**	**138**
1.–1.	*Kryštof Bílý*	ZŠ Bernarda Bolzana, Tábor	5	5	6	7	8	8	7	**46**	**132**
2.–2.	*Jan František Lukáš*	G Jírovcova, České Budějovice	5	5	6	7	8	6	7	**44**	**127**
3.–3.	*Berenika Bromová*	ZŠ a MŠ da Vinci Dolní Břežany	5	5	6	7	–	–	4	**27**	**100**
4.–4.	*Jakub Zelenka*	Gymnázium, Říčany	2	3	1	7	2	7	2	**24**	**85**
5.–5.	*Matěj Novák*	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	5	5	–	–	–	5	–	**15**	**84**
6.–6.	*Anna Achedžak*	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	4	3	5	7	5	–	6	**30**	**61**
7.–7.	*Marek Bielesz*	ZŠ a MŠ Bystřice	5	5	–	7	–	4	–	**21**	**60**
8.–8.	*Jakub Brabec*	ZŠ SVAT Olomouc	–	5	2	–	–	6	–	**13**	**43**
9.–9.	*Filip Kosař*	G, Blansko	4	3	–	–	–	1	–	**8**	**36**
10.–10.	*Monika Větrovcová*	ZŠ, MŠ a ZUŠ Jesenice	5	5	–	–	–	3	–	**13**	**34**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	8	8	7	**46**	**138**
11.–12.	*Anna Bouzková*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
11.–12.	*Štěpán Lýsek*	Slovanské G, Olomouc	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**32**
13.–13.	*Alex Filipi*	G Dašická, Pardubice	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**31**
14.–15.	*Klára Knopfová*	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**30**
14.–15.	*Ondřej Píše*	Gymnázium Sázavská Praha 2	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**30**
16.–16.	*Kristýna Zvonková*	ZŠ Dřevnická, Zlín	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**26**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	8	8	7	**46**	**138**
1.–1.	*Richard Menšík*	G, Boskovice	5	5	6	7	5	6	5	**39**	**121**
2.–2.	*Emilie Kimmerová*	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	5	5	6	4	4	3	7	**34**	**110**
3.–3.	*Štěpán Zouhar*	G J. Blahoslava, Ivančice	5	5	6	7	5	5	5	**38**	**108**
4.–4.	*Polina Efimova*	Sunny Can. International Sch.	5	5	6	7	4	2	7	**36**	**107**
5.–5.	*Agnes Dostálova*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	3	5	7	–	7	4	**31**	**100**
6.–6.	*Petra Linhartová*	ZŠ a MŠ Baška	5	5	6	7	4	3	5	**35**	**94**
7.–7.	*Klaudie Krumpová*	G dr. V. Šmejkala, Ústí n. L.	4	3	4	7	4	–	6	**28**	**87**
8.–8.	*Michaela Plívová*	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	4	3	2	2	4	3	5	**23**	**86**
9.–9.	*Petr Kysela*	G, Český Krumlov	4	5	4	7	–	4	6	**30**	**82**
10.–10.	*Anna Ličková*	G, Litoměřická, Praha	5	5	6	–	–	8	–	**24**	**81**
11.–11.	*Anna Závrbská*	G prof. J. Patočky, Praha	4	5	–	7	3	4	–	**23**	**80**
12.–12.	*Alexandr Lukács*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	5	5	2	7	–	–	5	**24**	**79**
13.–15.	*Petr Do Vu*	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	4	5	4	7	5	1	4	**30**	**73**
13.–15.	*Ella Heinichová*	G a ZUŠ, Šlapanice	4	5	3	7	–	–	–	**19**	**73**
13.–15.	*Fabián Muster*	G Chotěboř	5	5	–	–	–	5	4	**19**	**73**
16.–16.	*Viktorie Žídková*	ZŠ a MŠ Baška	5	5	2	–	–	–	–	**12**	**70**
17.–17.	*Tomáš Wolf*	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**65**
18.–18.	*Matěj Fouček*	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**64**
19.–19.	*Karel Olšar*	G, Český Krumlov	5	5	–	–	–	4	4	**18**	**58**
20.–20.	*Jan Harmach*	ZŠ a MĚĚŠ Nymburk	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**53**
21.–21.	*Pavel Do Vu*	ZŠ Václavkova, Mladá Boleslav	4	5	1	3	4	1	2	**20**	**51**
22.–22.	*Klára Šimková*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	3	7	–	–	1	**17**	**49**
23.–23.	*Dominik Jochymek*	ZŠ , Vendryně	4	4	–	–	–	–	–	**8**	**45**
24.–25.	*Zuzana Dorotíková*	ZŠ a MŠ Lískovec, K Sedlištím, F	–	–	–	–	–	–	–	–	**44**
24.–25.	*Aurelie Kepková*	G, Olomouc-Hejčín	2	3	–	–	–	–	4	**9**	**44**
26.–27.	*Ivana Šarochová*	ZŠ Amálská, Kladno	–	–	–	–	–	–	–	–	**42**
26.–27.	*Eliška Voráčová*	G, Brno-Bystrc	–	5	–	–	–	2	–	**7**	**42**
28.–29.	*Melinka Čejpová*	Arcibiskupské G, Praha	5	5	5	–	–	–	–	**15**	**41**
28.–29.	*Anna Karpíšková*	G Mensa, Praha	4	3	3	–	–	3	–	**13**	**41**
30.–30.	*Michal Baloun*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	4	6	–	–	–	–	**10**	**38**
31.–32.	*Rodion Pysarev*	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
31.–32.	*Štěpán Remeš*	G, Hustopeče	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
33.–33.	*Tadeas Moroz*	Ilandaskolan	5	5	6	7	–	7	–	**30**	**30**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	8	8	7	**41**	**123**
1.–1.	*Lukáš Kopecký*	G, Litomyšl	–	5	6	7	8	8	7	**41**	**122**
2.–2.	*Anna Přívětivá*	G, Litoměřická, Praha	–	5	5	7	8	7	7	**39**	**120**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	8	8	7	**41**	**123**
3.–3.	*Viktorie Snášelová*	Masarykovo G, Plzeň	–	5	5	6	8	8	7	**39**	**119**
4.–5.	*Vladimír Kotsch*	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	5	5	6	7	8	7	**38**	**115**
4.–5.	*Oleg Šatánek*	Střední škola Hradec Králové	–	5	5	7	8	8	7	**40**	**115**
6.–6.	*Eva Brožovičová*	Podkrušnohorské G, Most	–	5	6	7	8	8	7	**41**	**113**
7.–7.	*Pavel Doskočil*	G, Žamberk	–	5	5	7	5	7	6	**35**	**111**
8.–8.	*Amelie Zemanová*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	7	7	6	6	**37**	**109**
9.–9.	*Pavla Holečková*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	6	7	7	4	6	**35**	**108**
10.–10.	*Lucie Bělová*	G Opatov, Praha	–	5	6	7	6	–	5	**29**	**105**
11.–12.	*Matyáš Kubíček*	G a ZŠ Labyrinth	–	5	6	7	8	1	7	**34**	**100**
11.–12.	*Blanka Nováková*	G, Vídeňská, Brno	–	3	3	7	8	4	6	**31**	**100**
13.–13.	*Rafael Foltýn*	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	–	5	4	7	4	3	5	**28**	**96**
14.–14.	*Bartoloměj Stoklásek*	ZŠ Troubelice	–	3	6	7	8	8	2	**34**	**92**
15.–15.	*Eva Sýkorová*	G a JŠ, Břeclav	–	5	6	7	5	7	–	**30**	**89**
16.–16.	*Matěj Vacek*	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	–	5	5	7	–	2	6	**25**	**83**
17.–17.	*Lukáš Košovan*	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	3	6	7	8	–	6	**30**	**81**
18.–18.	*Thea Pauerová*	G Mensa, Praha	–	5	6	7	–	4	–	**22**	**70**
19.–19.	*Dominika Martínková*	G Františka Křižíka, Plzeň	–	5	4	4	–	–	–	**13**	**66**
20.–21.	*Karel Benedikt*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	6	0	8	6	7	**27**	**65**
20.–21.	*Dorota Guzi*	ZŠ a MŠ Pastviny, Brno	–	5	6	2	–	–	6	**19**	**65**
22.–22.	*Lucie Jurásková*	G Dobruška	–	5	2	5	5	5	4	**26**	**64**
23.–23.	*Valentýna Sochorová*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	7	3	–	–	**21**	**53**
24.–24.	*Lucie Vaňková*	ZŠ Dr. Františka Ladislava Riegr	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**50**
25.–25.	*Matěj Máša*	ZŠ Kvítková, Zlín	–	5	–	3	2	5	–	**15**	**46**
26.–26.	*Dita Křížková*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	1	–	2	–	4	**12**	**45**
27.–28.	*Martin Konečný*	Masarykovo G, Vsetín	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**42**
27.–28.	*David Vančata*	G P. de Coubertina, Tábor	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**42**
29.–30.	*Eliška Humlová*	G, Cheb	–	3	2	7	–	–	3	**15**	**40**
29.–30.	*Martin Urban*	ZŠ a MŠ Dlouhá, Pohořelice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**40**
31.–33.	*Václav Bláha*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**38**
31.–33.	*Petr Kalina*	Mensa G, Praha 6	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**38**
31.–33.	*Jaroslav Motlík*	G Opatov, Praha	–	5	3	7	–	–	–	**15**	**38**
34.–34.	*Matěj Straka*	ZŠ a MŠ Dolní Bojanovice	–	3	1	7	–	–	5	**16**	**35**
35.–37.	*Tomáš Macek*	ZŠ Pod Vodojemem, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**33**
35.–37.	*František Šustr*	Fak. ZŠ při PedF UK, Praha 5	–	5	–	7	–	–	2	**14**	**33**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	8	8	7	**41**	**123**
1.–1.	*Adam Houdek*	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	5	6	7	8	8	7	**41**	**120**
2.–2.	*Jan Horský*	G, Brno - Řečkovice	–	5	6	7	8	8	7	**41**	**119**
3.–3.	*Matěj Dudek*	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	–	5	7	5	8	8	7	**40**	**117**
4.–4.	*Vít Kupilík*	G, Zábřeh	–	5	6	7	6	7	7	**38**	**114**
5.–5.	*Mariana Hořínková*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	7	7	5	7	**37**	**113**
6.–6.	*Valentina Vykoukalová*	ZŠ Komenského, Zlín - Malenovice	–	5	4	7	8	6	7	**37**	**111**
7.–7.	*Jaroslav Hatina*	15. základní škola Plzeň	–	5	6	7	4	8	6	**36**	**110**
8.–9.	*Květa Bouchalová*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	6	7	7	7	4	**36**	**108**
8.–9.	*Aneta Brzokoupilová*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	5	7	7	6	7	**37**	**108**
10.–11.	*Rozálie Michaela Furchová*	G, Židlochovice	–	5	5	7	6	6	6	**35**	**107**
10.–11.	*Emma Polcarová*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	6	7	8	4	6	**36**	**107**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	8	8	7	41	123
12.–12.	*Šimon Swaczyna*	Slovanské G, Olomouc	–	5	4	7	6	6	7	**35**	**105**
13.–13.	*Viktor Novák*	Nový PORG, Praha	–	5	6	7	5	4	5	**32**	**103**
14.–14.	*Antonín Šreiber*	ZŠ Skálova, Turnov	–	5	4	7	6	4	5	**31**	**100**
15.–15.	*Barbora Petrásková*	28. základní škola Plzeň	–	5	6	7	4	–	5	**27**	**97**
16.–16.	*Karolína Vtípilová*	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	5	6	7	5	3	6	**32**	**96**
17.–17.	*Dan Školař*	ZŠ a MŠ, Březová, okr. U. H.	–	5	6	7	8	6	4	**36**	**94**
18.–18.	*Jakub Vávra*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	5	6	7	–	–	–	**18**	**90**
19.–19.	*Angela Poláchová*	Biskupské G, Brno	–	5	6	7	8	–	7	**33**	**87**
20.–21.	*Filip Brabec*	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	5	6	7	5	4	7	**34**	**85**
20.–21.	*Vratislav Košina*	ZŠ a MŠ Věry Čáslavské, Praha 6	–	4	6	7	5	1	3	**26**	**85**
22.–23.	*Vladislav Efimov*	Sunny Can. International Sch.	–	5	6	7	–	2	7	**27**	**83**
22.–23.	*Matouš Šťastný*	G, Omská, Praha	–	5	6	7	6	3	5	**32**	**83**
24.–25.	*Kateřina Kučerová*	G Ústavní, Praha	–	5	6	7	4	–	–	**22**	**76**
24.–25.	*Johana Elizabeth Smítková*	Mensa G, Praha 6	–	5	6	4	4	–	–	**19**	**76**
26.–26.	*Petr Matějka*	G, Brno - Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**75**
27.–27.	*Laura Jurcickova*	FZŠ při PedF UK Barrandov	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**71**
28.–28.	*Matouš Brzobohatý*	ZŠ Albertova, Kroměříž	–	3	5	7	–	–	–	**15**	**69**
29.–30.	*Jakub Folber*	G Na Vítězné pláni, Praha	–	2	–	7	2	4	–	**15**	**66**
29.–30.	*Jan Štábl*	ZŠ Bratří Čapků, Ústí nad Orlicí	–	5	6	7	4	–	1	**23**	**66**
31.–31.	*Jaroalav Routa*	Mensa G, Praha 6	–	5	6	7	–	3	–	**21**	**65**
32.–33.	*Štěpán Bartáček*	ZŠ Na Výsluní, Uherský Brod	–	4	3	7	3	–	3	**20**	**63**
32.–33.	*Flora Eisner*	G, Litoměřická, Praha	–	5	6	7	8	4	–	**30**	**63**
34.–36.	*Michal Blahoš*	G, Benešov	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**59**
34.–36.	*Magdalena Čejpová*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**59**
34.–36.	*Maria Sidorova*	První české G, Karlovy Vary	–	3	–	7	–	7	4	**21**	**59**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: https://vyfuk.org
e-mail: vyfuk@vyfuk.org

/ksvyfuk *@ksvyfuk*

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.