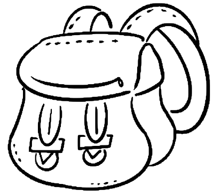
Úloha III.5 ... Těžší batoh

8 bodů; (chybí statistiky)



Aleš sice rád chodí po horách, ale to je často spojené s nošením těžkého batohu, což až tak v oblibě nemá. Napadlo ho však, že by při další cestě mohl zkusit na batoh připevnit balón naplněný vodíkem, který by mu mohl tuto nepříjemnost pomoct vyřešit. Protože nerad dělá unáhlená rozhodnutí, rozhodl se problém nejprve důkladně propočítat. Předpokládejte, že při chůzi Aleš vyvíjí konstantní výkon $P_0 = 70\,\mathrm{W}$, váží $m = 70\,\mathrm{kg}$ a bez batohu chodí po rovině rychlostí $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

1. *Aleš si uvědomil, že sílu, kterou je třeba při chůzi překonávat, lze poměrně dobře modelovat jako obyčejnou třecí sílu s neznámým koeficientem smykového tření f. Jakou rychlostí se bude Aleš pohybovat, pokud ponese po rovině batoh o hmotnosti $m_\mathrm{B} = 10\,\mathrm{kg}$?*

2. *Předpokládejte nyní, že si Aleš na tento batoh připevní kulový balón velký tak, aby jeho vztlaková síla vyvážila tíhu batohu. (Hmotnost látky, ze které je balón vyroben, a vodíku, kterým je naplněn, je zanedbatelná.) Pro jaký rozsah rychlostí bude výhodnější (tj. bude vyžadovat menší výkon) chodit po rovině s balónem než bez něj?*

3. *Pokud si chce Aleš zachovat svůj výkon při chůzi P_0, půjde po rovině rychleji s balónem, nebo bez něj? Uvažujte, že na balón působí Newtonův odpor, který je výrazně vyšší než odpor vzduchu působící na Aleše.*

Nápověda: *Můžeme prozradit, že k úloze je potřeba si najít hustotu vzduchu a Newtonův odporový koeficient balónu (koule). Nezapomeňte citovat použité zdroje!*

1. K vyřešení první podúlohy využijeme vztah

$$P = Fv\,,$$

který určuje výkon P potřebný k překonávání síly F při pohybu rychlostí v proti směru působení síly. V našem případě se jedná o Aleše, který jde s batohem neznámou rychlostí v a vyvíjí konstantní výkon $P_0 = 70\,\mathrm{W}$. Se sílou, kterou musí překonávat, lze dle zadání počítat jako se silou třecí, která je dána vztahem

$$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{N}\,,$$

kde f je koeficient tření a F_N tzv. *normálová síla*, tedy síla působící kolmo na podložku. Zde se jedná jednoduše o tíhovou sílu, do které ovšem musíme započítat jak hmotnost Aleše m, tak i batohu m_B.

$$F_\mathrm{N} = (m + m_\mathrm{B})g$$

Vypočítáním třecí síly a dosazením do vztahu pro výkon dostáváme

$$v = \frac{P_0}{f(m + m_\mathrm{B})g}\,,$$

kde jsme vyjádřili hledanou rychlost v. Abychom úlohu vyřešili, potřebujeme ještě určit koeficient f.

K tomu využijeme znalosti, jak rychle Aleš chodí bez batohu. V tom případě máme totiž jako neznámou jen koeficient tření f. Jedinou změnou při výpočtu je, že tíhová síla působící na Aleše bez batohu je jen $F_\mathrm{N} = mg$. Opět tedy vypočítáme třecí sílu a dosadíme do vztahu pro výkon, čímž dostaneme rovnici

$$P_0 = fmgv_0\,, \tag{1}$$

kde $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ je Alešova rychlost při chůzi po rovině bez batohu. Nyní nám stačí vyjádřit z této rovnice f a dosadit do vztahu pro rychlost chůze s batohem, z čehož dostáváme

$$v = \frac{m}{m + m_\mathrm{B}} v_0 \doteq 3{,}9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Pro zjednodušení řešení druhé podúlohy také uvádíme vypočtenou číselnou hodnotu koeficientu $f \doteq 0{,}082$, která byla vypočtena z rovnice (1).

2. Zde opět potřebujeme vztah pro výkon. Nyní ovšem bude působit proti chůzi nejen třecí síla F_t způsobená tíhovou silou, ale také Newtonova odporová síla F_o.

$$P_2 = (F_\mathrm{t} + F_\mathrm{o})v$$

Tíhová síla působící na batoh je vyrovnána vztlakovou silou balónu, tím pádem třecí síla je $F_\mathrm{t} = fmg$.

Newtonova odporová síla je daná vztahem

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} S_\mathrm{B} v^2\,,$$

kde $C = 0{,}5$ je odporový koeficient koule, $\rho_\mathrm{vz} = 1{,}23\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ hustota vzduchu, S_B průřez balonu a v rychlost pohybu. Průřez lze zjistit jako $S_\mathrm{B} = \pi r_\mathrm{B}^2$, kde r_B je poloměr balónu, který ale zatím neznáme. Můžeme ho vypočítat díky znalosti, že vztlaková síla balónu F_vz vyrovná tíhu batohu[1].

$$F_\mathrm{vz} = F_\mathrm{B} = m_\mathrm{B} g$$

Vztlaková síla je dána vztahem

$$F_\mathrm{vz} = V_\mathrm{B} \rho_\mathrm{vz} g\,.$$

Zde V_B je objem balónu, který je daný vzorcem pro objem koule

$$V_\mathrm{B} = \frac{4}{3} \pi r_\mathrm{B}^3\,.$$

Kombinací předchozích tří rovnic můžeme vypočítat poloměr balónu jako

$$\frac{4}{3} \pi r_\mathrm{B}^3 \rho_\mathrm{vz} g = m_\mathrm{B} g \quad \Rightarrow \quad r_\mathrm{B} = \sqrt[3]{\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}}}\,.$$

Nyní můžeme také spočítat průřez balónu

$$S_\mathrm{B} = \pi \left(\frac{3m_\mathrm{B}}{4\pi\rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3}\,,$$

[1] Zde dle zadání zanedbáváme tíhu vodíku, kterým je balón naplněn.

a tedy i Newtonovu odporovou sílu

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} \pi \left(\frac{3 m_\mathrm{B}}{4 \pi \rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3} v^2 \,.$$

Konečně máme kompletní vztah pro výkon

$$P_2 = \left[mgf + \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} \pi \left(\frac{3 m_\mathrm{B}}{4 \pi \rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3} v^2 \right] v \,. \tag{2}$$

Nás konkrétně zajímá, kdy (pro které rychlosti) je výhodnější chodit s balónem. Tedy kdy je tento výkon menší než ten, který vyžaduje chůze bez balónu. Ten, jak již víme, je dán vztahem

$$P_1 = (m + m_\mathrm{B}) g f v \,.$$

Všechny rychlosti, které takovou podmínku splňují, nalezneme jako řešení nerovnice $P_1 > P_2$, již můžeme upravit na

$$\left[m_\mathrm{B} g f - \frac{1}{2} C \rho_\mathrm{vz} \pi \left(\frac{3 m_\mathrm{B}}{4 \pi \rho_\mathrm{vz}} \right)^{2/3} v^2 \right] v \; > 0 \,.$$

Jelikož úloha dává smysl pouze pro kladnou rychlost $v > 0$, zajímá nás, kdy je závorka kladná. Je celkem snadné určit kritickou (hraniční) rychlost $\pm v_\mathrm{c}$, pro kterou nastane rovnost obou členů v závorce a ta se tak stane nulovou.

$$\pm v_\mathrm{c} = \pm \sqrt{\frac{2 m_\mathrm{B} g f}{C \rho_\mathrm{vz} \pi}} \sqrt[3]{\frac{4 \pi \rho_\mathrm{vz}}{3 m_\mathrm{B}}} \doteq \pm 2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq \pm 8{,}3\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \,.$$

Nyní si již stačí rozmyslet, že závorka bude kladná pro $v \in (-v_\mathrm{c}, v_\mathrm{c})$. Uvážíme-li, že úloha fyzikálně dává smysl pouze pro $v > 0$, dostáváme výsledek. Chůze s balónem bude vyžadovat menší výkon pro rozsah rychlostí $v \in (0, v_\mathrm{c})$.

3. K vyřešení této úlohy bychom teoreticky mohli vypočítat Alešovu rychlost při chůzi s balónem a porovnat ji s rychlostí bez balónu vypočtenou v první podúloze. To je ale složité, neboť bychom museli vyřešit rovnici (2) vzhledem k rychlosti v, což je kubická rovnice.

Můžeme však postupovat i jinak a jednodušeji. Z první podúlohy víme, že při výkonu P_0 je Alešova rychlost bez balónu $v = 3{,}94\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Z řešení druhé podúlohy zase víme, že tato rychlost spadá do rozmezí rychlostí, pro které chůze s balónem vyžaduje menší výkon. Navýšením výkonu na původní hodnotu P_0 bychom rychlost zvětšili.[2] Z toho plyne, že při výkonu P_0 půjde Aleš rychleji s balónem než bez něj.

Aleš Opl
ales.opl@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[2] To je buď jasné intuitivně, nebo si uvědomíme, že výkon daný rovnicí (2) je rostoucí funkcí rychlosti, a tedy i rychlost (inverzní funkce) je rostoucí funkcí výkonu.