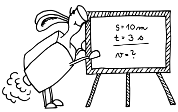
výfuk

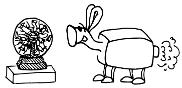
výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



Zadání III. série



Termín odeslání: 13. 1. 2025 20.00

Úloha III.1 ... Sbohem, Země ❻ ❼ — 5 bodů

Když se rychle točíte na kolotoči a ten se pod vámi prudce zastaví, cítíte, jak pokračujete dál, a nedržíte-li se dost pevně, můžete z něj snadno spadnout.

Pojďme se podívat na trochu větší kolotoč – na Zemi. Kdyby se pod vámi najednou zastavila Země (přestala se otáčet kolem své osy), měli byste dostatečnou rychlost na to, abyste z ní odletěli?

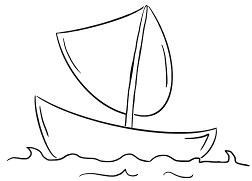
Úloha III.2 ... Epipremnum neon ❻ ❼ ❽ ❾ — 5 bodů

Viktor si velice oblíbil jednu ze svých kytek, protože velmi dobře roste. Každý její nový list je o 20 % delší než ten předchozí. Pokud má současný poslední list délku 25 cm, kolik listů ještě musí vyrůst, aby ten největší měl délku alespoň půl metru? Za předpokladu, že všechny listy mají stejný tvar, kolikrát větší povrch bude mít tento největší list oproti tomu 25 cm dlouhému?

Úloha III.3 ... Závody na orbitě ❻ ❼ ❽ ❾ — 6 bodů

V roce 2875 nejbohatší třída společnosti žije na oběžné dráze Země ve vesmírné stanici, která má tvar dokonalého tenkostěnného válce o vnitřním poloměru 5,0 km. Stanice svou rotací kolem osy válce generuje přitažlivost (tzv. „umělou gravitaci“) 1,0g. Mezi oblíbenou zábavu vyšší třídy patří například automobilové závody. Během jízdy proti směru otáčení vesmírné stanice si však řidiči všímají, že se cítí trochu lehčí. Proč tomu tak je? Jakou rychlostí by musel závodník jet, aby se cítil lehčí přesně o polovinu?

Úloha III.4 ... Na vlnách ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů



Výfuček ukotvil svou malou jachtu na širém moři, aby se mohl v klidu opalovat na přídi své lodě. Ihned po zakotvení však zjistil, že loď se výrazně houpe. Vcelku rychle se mu podařilo naměřit, jak se loď na vlnách pohupuje s frekvencí $f = 0{,}2\,\mathrm{Hz}$, ze které se mu začalo dělat špatně. Napadlo ho ale, že může vyplout ve směru šíření vln, aby frekvenci houpání snížil, a tím uklidnil svůj žaludek. Rozhodl se tak učinit a vyrazil s lodí rychlostí $v = 15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ po směru šíření vln. Jestliže vrcholy vln putují po moři rychlostí $c = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, na jakou frekvenci se houpání Výfučkovy jachty snížilo?

Úloha III.5 ... Těžší batoh ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 8 bodů

Aleš sice rád chodí po horách, ale to je často spojené s nošením těžkého batohu, což až tak v oblibě nemá. Napadlo ho však, že by při další cestě mohl zkusit na batoh připevnit balón naplněný vodíkem, který by mu mohl tuto nepříjemnost pomoct vyřešit. Protože nerad dělá unáhlená rozhodnutí, rozhodl se problém nejprve důkladně propočítat. Předpokládejte, že při chůzi Aleš vyvíjí konstantní výkon $P_0 = 70\,\mathrm{W}$, váží $m = 70\,\mathrm{kg}$ a bez batohu chodí po rovině rychlostí $v_0 = 4{,}5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

1. Aleš si uvědomil, že sílu, kterou je třeba při chůzi překonávat, lze poměrně dobře modelovat jako obyčejnou třecí sílu s neznámým koeficientem smykového tření f. Jakou rychlostí se bude Aleš pohybovat, pokud ponese po rovině batoh o hmotnosti $m_\mathrm{B} = 10\,\mathrm{kg}$?

2. Předpokládejte nyní, že si Aleš na tento batoh připevní kulový balón velký tak, aby jeho vztlaková síla vyvážila tíhu batohu. (Hmotnost látky, ze které je balón vyroben, a vodíku, kterým je naplněn, je zanedbatelná.) Pro jaký rozsah rychlostí bude výhodnější (tj. bude vyžadovat menší výkon) chodit po rovině s balónem než bez něj?

3. Pokud si chce Aleš zachovat svůj výkon při chůzi P_0, půjde po rovině rychleji s balónem, nebo bez něj? Uvažujte, že na balón působí Newtonův odpor, který je výrazně vyšší než odpor vzduchu působící na Aleše.

Nápověda: Můžeme prozradit, že k úloze je potřeba si najít hustotu vzduchu a Newtonův odporový koeficient balónu (koule). Nezapomeňte citovat použité zdroje!

Úloha III.E ... Stínová ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

Výfuček při večerní procházce pozoroval svůj stín. Všiml si, že se délka stínu mění podle úhlu, pod jakým na něj dopadá světlo z lampy. Hned si také rozmyslel, jakým způsobem délka stínu závisí na úhlu, pod nímž lampa svítí vůči zemské rovině.

Změřte závislost délky stínu předmětu na úhlu, pod kterým na něj svítíte. Stejně jako Výfuček také nalezněte funkci, která ji popisuje, a zdůvodněte, proč ji takto popisuje (například vhodným nákresem). Naměřené hodnoty následně vyneste do grafu a zkuste je danou funkcí proložit.

Úloha III.V ... Potápěčská ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček si chtěl vyzkoušet potápění v moři. Celý nadšený se pustil do připravování výstroje. Rád by si ale svůj ponor pořádně naplánoval a propočítal, aby nedošlo k problémům a on se mohl zcela uvolnit při sledování podmořského života.

1. Uvědomil si, že kvůli místu, ve kterém se chce potápět, stráví téměř celý svůj ponor v konstantní hloubce $h = 15\,\mathrm{m}$. Na ponor má Výfuček k dispozici jednu 12l láhev naplněnou vzduchem o počátečním tlaku $p_\mathrm{p} = 190\,\mathrm{bar}$. Dále si také změřil, že jeho spotřeba vzduchu na hladině při lehké fyzické námaze je $Q = 30\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$. Pomozte Výfučkovi spočítat, kolik času před zahájením výstupu může pod hladinou strávit, pokud si na bezpečný výstup chce v lahvi nechat tlak $p_\mathrm{r} = 70\,\mathrm{bar}$.

2. Další věcí, na kterou musí Výfuček před ponorem myslet, je závaží, konkrétně jak těžké bude potřebovat. Výfuček si vzpomněl, že když se naposledy potápěl ve svém oblíbeném sladkovodním jezeře s hustotou vody $\rho_1 = 997\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, stačilo mu pro správné vyvážení mít na opasku $m_\mathrm{o} = 3{,}0\,\mathrm{kg}$ olova. Jelikož se Výfuček tentokrát chystá potápět ve slané vodě s hustotou $\rho_2 = 1\,025\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, bude tato hmotnost odlišná. Určete, kolik kg závaží bude muset na opasek přidat nebo kolik bude muset z opasku odebrat, aby byl vyvážený ve slané vodě. Uvažujte, že Výfuček váží $m_\mathrm{v} = 40{,}0\,\mathrm{kg}$. Hustota olova činí přibližně $\rho_\mathrm{o} = 11\,300\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Výfučtení: Fyzika potápění

Úvod

Letošní třetí Výfučtení se zaměří na téma, které není moc známé, nicméně je rozhodně velice zajímavé – *fyzika potápění*. Ačkoli jsme na konci listopadu a zimní radovánky jsou v plném proudu, věříme, že není na škodu si připomenout teplé dny tímto tropickým sportem, ve kterém se skrývá spousta fascinujících fyzikálních témat.

Vzduch

Vzduch patří mezi věci, které nejvíce ovlivňují průběh potápěčova ponoru. Jak jistě z biologie víte, k životu potřebujeme pomocí dýchání ze vzduchu získávat plynný kyslík, který se následně váže na hemoglobin v naší krvi a je rozváděn do tkání po celém těle člověka. Jelikož ale vzduchu pod vodou moc nenajdeme, musí si potápěči nosit vlastní. Nejčastěji ho přepravují stlačený pod tlakem cca 200 bar[1] ve dvanácti nebo dvacetilitrových lahvích.

Stlačený vzduch

Možná se právě zamýšlíte nad tím, proč si potápěči pod vodu nevezmou jen čistý kyslík a „plýtvají“ kapacitou svých lahví na skladování ostatních složek vzduchu. Odpověď je celkem jednoduchá – kyslík je ve velkých koncentracích pro naše tělo toxický, zejména pak postihuje

[1] Bar je mezi potápěči nejčastěji používanou jednotkou tlaku, protože přibližně odpovídá atmosférickému tlaku (1 bar = 100 000 Pa), což zjednodušuje počítání. Na definici bar se můžete podívat například zde `https://cs.wikipedia.org/wiki/Bar_(jednotka)`.

plíce a centrální nervovou soustavu. Kdyby si potápěči pod vodu vzali čistý kyslík, jejich ponor by skončil velmi rychle.

Samozřejmě i dýchání stlačeného vzduchu má své nevýhody. Tou hlavní je převážně dusík, který při tvoří cca 78 % vzduchu. Plyny, a tedy i dusík, se při vyšších tlacích rychleji a snáz rozpouští v tělních tekutinách (tuto skutečnost popisuje tzv. *Henryho zákon*). Hlavním rizikem tohoto jevu je, že pokud se v našem těle rozpustí moc velké množství dusíku, při vystoupání z vody a tedy i snížení tlaku se vyloučí z tělních tekutin v podobě bublinek, což nám může poškodit měkké tkáně. Takovým poškozením říkáme *dekompresní nemoc.*

Abychom této situaci předešli, nesmíme překročit kritické množství rozpuštěného dusíku v těle. Nadbytečné množství je třeba během výstupu z hloubky dostatečně pomalu vyloučit. Tato skutečnost limituje čas, který můžeme v dané hloubce, resp. při daném tlaku pod vodou strávit. Většina ponorů rekreačních potápěčů je tzv. *bezdekompresní*, tedy využívají první možnost, jak předejít dekompresní nemoci – tráví v dané hloubce jen tak krátký čas, při kterém se v jejich těle nerozpustí vysoké množství dusíku. Právě z těchto důvodů je jedním z nejdůležitějších aspektů plánování ponorů jasné stanovení hloubek a časů, které v těchto hloubkách strávíme.

Vzduch jako ideální plyn

Podívejme se na trochu fyziky, kterou lze při počítání se stlačeným vzduchem využít. Jako první zmíníme Daltonův zákon parciálních tlaků. Ten říká, že celkový tlak p směsi několika plynů odpovídá součtu parciálních tlaků[2] těchto plynů (p_1, p_2, p_3, …), tedy součtu tlaků jednotlivých složek.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Dále se při počítání se vzduchem vyplatí jej považovat za ideální plyn[3], pro který platí stavová rovnice

$$pV = nRT\,,$$

kde p je tlak plynu, V jeho objem, n látkové množství plynu, $R \doteq 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ značí molární plynovou konstantu a T je teplota plynu v kelvinech.

Ideální plyny mohou podléhat tzv. *termodynamickým dějům*, tj. procesům, při kterých se mění některé veličiny popisující stav plynu (teplota, tlak, objem…). Jedním z termodynamických dějů je např. *izochorický* děj, při němž se u daného množství plynu mění teplota společně s tlakem, zatímco objem zůstává stejný. Pokud tedy ve stavové rovnici budeme nahlížet na látkové množství a na objem jako na konstanty ($n = \mathrm{konst}$, $V = \mathrm{konst}$), obdržíme tzv. *Charlesův zákon* popisující izochorický děj jako

$$\frac{p}{T} = \mathrm{konst} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}\,,$$

kde tentokrát p_1 a p_2 značí tlak plynu na začátku a na konci děje, podobně symboly T_1 a T_2 značí počáteční a koncovou teplotu plynu. Obdobně můžeme pro *izobarický* děj zachovávající stálý tlak odvodit *Gay-Lussacův zákon*

$$\frac{V}{T} = \mathrm{konst} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}\,.$$

[2]Parciální tlak je takový tlak, který by měl daný plyn, kdyby při stejné teplotě sám zaujímal objem, který zaujímá směs plynů.

[3]Ideální plyn je zjednodušený model reálného plynu; zanedbává velikost částic, přeměny kinetické energie při jejich srážkách na jiné formy energie a všechny ostatní interakce mezi částicemi.

A pro *izotermický*, což je děj při konstantní teplotě, platí *Boyleův–Mariottův zákon*

$$pV = \text{konst}\,.$$

V ideálním plynu mohou probíhat i jiné děje, tyto tři jsou však z hlediska potápečské fyziky nejdůležitější. Pokud se chcete dozvědět více o ideálním plynu a dějích, které v něm mohou probíhat, doporučujeme přečíst si Výfučtení 1. série 13. ročníku[4].

Nejspíše jste si všimli, že v mnohých zákonech popisujících plyn hraje klíčovou roli jeho tlak. V potápěčské fyzice nás nejvíce zajímá tlak dýchaného vzduchu, který je díky rovnováze tlaků mezi okolím a dýchacím ústrojím roven okolnímu tlaku v dané hloubce pod vodou. Můžeme si jednoduše spočítat, že tlak vzduchu na hladině (atmosférický tlak) je cca 1 bar a s přibývající hloubkou se po každých 10 m zvýší o přibližně 1 bar.[5] Např. tlak ve 20 m pod hladinou by byl cca $1\,\mathrm{bar} + 20\,\mathrm{m}/(10\,\mathrm{m}) \cdot 1\,\mathrm{bar} = 3\,\mathrm{bar}$.

Archimédův zákon

Jedním z nejznámějších zákonů týkajících se tekutin (kapalin a plynů) je Archimédův zákon. Ten říká, že „*Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze tekutiny stejného objemu, jako ponořená část tělesa.*“ To je důvod, proč se všechno ve vodě zdá lehčí – může za to vztlaková síla, kterou spočítáme jako

$$F_{\mathrm{vz}} = V \rho_{\mathrm{k}} g\,,$$

kde V je objem tělesa, ρ_{k} hustota kapaliny a g tíhové zrychlení.

Když tedy chceme spočítat výslednou sílu působící na předmět ve vodě, musíme od tíhové síly $F_G = mg$, kde $m = \rho_{\mathrm{t}} V$ je hmotnost tělesa o hustotě ρ_{t}, odečíst vztlakovou sílu

$$F = F_G - F_{\mathrm{vz}} = V g(\rho_{\mathrm{t}} - \rho_{\mathrm{k}})$$

Potápěči často potřebují překonat vztlakovou sílu, aby se vůbec mohli ponořit. Toho lze nejjednodušeji docílit zvýšením jejich hmotnosti při co nejmenším zvětšení objemu. Tento problém se řeší pomocí olověných opasků. Olovo je ideální, protože má velmi vysokou hustotu (přibližně $11\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$), což znamená, že i malý objem olova má velkou hmotnost a umožňuje efektivní kompenzaci vztlaku.

Nyní si uveďme něco málo z potápěčské praxe. Je důležité uvědomit si rozdíl mezi sladkou a slanou vodou. Pokud se potápíme ve sladké vodě s určitou hmotností závaží, ve slané vodě tato hmotnost nebude stačit. Slaná voda má vyšší hustotu, což znamená větší vztlak. Proto si do slané vody musíme vzít olova více. Ale s množstvím závaží je potřeba zacházet opatrně, nechceme se totiž ani přetížit.

Aby si potápěči vyzkoušeli, jak jsou vyvážení, před prvním ponorem na daném místě si udělají tzv. *vyvažovací ponor*. Většinou se dělá v hloubce 5 metrů, kde musíme při nádechu mírně stoupat a při výdechu lehce klesat. Hlavním ukazatelem je to, že potápěč začne na hladině klesat až s úplně vyfouknutým žaketem[6]. Příliš mnoho závaží může způsobit přetížení. Jak víme z Boyleova–Mariottova zákona, čím hlouběji se ponoříme, tím více se objem plynu v žaketu, a tedy i vztlak, sníží. Proto když se přetížíme a už v malé hloubce se musíme vyvažovat pomocí žaketu, nemuseli bychom se pak z větší hloubky vynořit.

[4] https://vyfuk.org/_media/ulohy/r13/s1/vyfucteni1.pdf

[5] K výsledku dojdeme využitím vztahu $p = h\rho g$ pro hydrostatický tlak způsobený tíhou vodního sloupce výšky $h = 10\,\mathrm{m}$ o hustotě $\rho \doteq 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, kde $g \doteq 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení.

[6] Žaket je potápěčská vesta sloužící k regulaci vztlaku tím, že při do-, resp. vyfouknutí zvětšuje, resp. zmenšuje svůj objem.

Zvuk

Zvuk je vlastně šíření malých změn tlaku prostředí, z nichž část naše uši dokáží zaznamenat. Abychom pochopili chování zvuku pod vodou, je nezbytné si uvědomit rozdíly mezi šířením zvuku ve vzduchu a ve vodě. Voda jako prostředí má zcela odlišné fyzikální vlastnosti, které ovlivňují naše vnímání zvuku (jak ho slyšíme, odkud přichází, z jaké dálky se může šířit). Pro potápěče je proto důležité znát tyto základní principy, aby se lépe orientovali a dokázali na zvukové podněty bezpečně a efektivně reagovat.

Rychlost zvuku

Voda má skoro tisíckrát vyšší hustotu než vzduch. Její molekuly jsou přitom zhruba o třetinu lehčí než biatomické molekuly dusíku, se kterými se můžeme potkat ve vzduchu. Molekuly vody to tedy od sebe nemají tak daleko, proto když se jedna rozkmitá, narazí na ostatní dřív (lokálně zvýší tlak). Následně dojde k předání části jejich energie a další molekuly vody poté změnu tlaku stejným způsobem přenáší dál. Závislost změny tlaku v tekutině na její hustotě, resp. objemu popisuje objemový modul pružnosti K, který je pro vodu při teplotě 25 °C přibližně $2{,}2 \cdot 10^9$ Pa. Dosazením do vzorce níže zjistíme rychlost zvuku v kapalině

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}\,.$$

Pro vodu vychází přibližně $1\,490\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, čili zhruba čtyřnásobek rychlosti zvuku ve vzduchu, která se při podobných teplotách udává okolo $343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Šíření zvuku

Jak jsme si ukázali, voda je rychlejším a díky vyšší hustotě také lepším přenašečem zvuku než vzduch. Při šíření změny tlaku mezi molekulami vody proto v realitě dochází k menším ztrátám energie, tudíž vyslaný vzruch dorazí dál. Lidské smysly uzpůsobené suchozemským podmínkám poté zdrojům zvuků ve vodě připisují kratší vzdálenosti. To se může vymstít například při potápění v blízkosti lodí, když potřebujeme vědět, kde se nachází.

Ještě hůře se pod vodou odhaduje směr, odkud nějaký signál přichází. Ve vzduchu jsme jej schopni rozlišovat na základě drobných rozdílů v čase a intenzitě zvuku mezi oběma ušima. Zvuk ve vodě se však šíří tak rychle, že menší odchylky nemáme šanci zaznamenat.

Světlo

I chování světla se pod vodou mění. Je to způsobeno kvůli fyzikálním jevům jako je lom, absorpce či rozptyl světla. Velkou roli hrají i vlastnosti vody, například čistota nebo vnitřní proudění.

Rychlost světla

Světlo se šíří jako vlnění.[7] Rychlost světla ve vakuu odpovídá $c \doteq 300\,000\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Ostatními prostředími světlo prostupuje pomaleji. Světlu můžeme přiřadit tzv. *vlnovou délku*, tj. vzdálenost krajních bodů nejmenšího opakujícího se úseku vlny, na jejímž základě rozeznáváme barvy. Tuto

[7] Což ostatně zvuk také, jejich povaha se ale liší; první je elektromagnetické a příčné, druhé mechanické a podélné.

vzdálenost světlo urazí za čas $T = 1/f$, kde f je frekvence (česky kmitočet) vyjadřující počet vln, které za 1 s projdou daným bodem. Frekvence f přímo souvisí s energií konkrétního záření, tudíž se díky zákonu zachování energie nemění. Můžeme psát

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f\,,$$

kde v je rychlost světla. Všimněme si, že čím pomaleji se světlo šíří, tím více se vlnová délka zkracuje.

Jak moc se světlo při vstupu do materiálu zpomalí, popisuje bezrozměrná materiálová veličina, index lomu světla:

$$n = \frac{c}{v}\,.$$

Pro vodu je to přibližně $n_{\text{voda}} = 1{,}33$ a pro vzduch $n \doteq 1$.

Lom světla

Na rozhraní dvou různých prostředí dochází kvůli změně rychlosti světla k lomu. Indexy lomů světla dvou různách materiálů n_1, n_2 dává do souvislosti s úhly φ_1, φ_2, které paprsek svírá s kolmicí na rozhraní materiálů před a po dopadu , Snellův zákon

$$n_1 \sin\varphi_1 = n_2 \sin\varphi_2\,.$$

Proto se ponořené předměty zdají být větší a blíž u hladiny. Pozor si musí dávat hlavně free diveři[8], protože pozorovaná hloubka z hladiny se jeví jako menší, než jaká ve skutečnosti je.

Absorpce a rozptyl světla

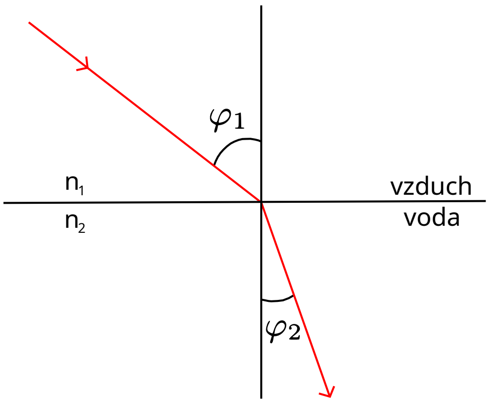
Když světlo vstoupí do vody, část jeho energie pohltí molekuly vody. Různé vlnové délky světla molekuly absorbují různě ochotně – nejdříve přijmou červenou část spektra, následně postupně i barvy s kratšími vlnovými délkami. To způsobí, že ve větších hloubkách objekty osvětlené sluncem vypadají modře, ačkoliv na vzduchu mají jiné barvy. To, v jakých hloubkách se nám ztratí jaká barva, je popsáno v tabulce 1.

barva	vlnová délka / nm	hloubka / m
červená	625–800	5
oranžová	590–625	10
žlutá	565–590	30
zelená, azurová	500–565	50

Tabulka 1: Absorpce barev

Přibližně v 50 metrech se nám už ztratí všechny barvy. Když jsme tedy ve větších hloubkách, všechno je jen šedomodré. Potápěči proto často používají svítilny s bílým světlem (složeným z mnoha různých vlnových délek), aby pod vodou viděli předměty ve správných barvách.

[8] Free diving je potápění bez dýchacího přístroje.



Obrázek 1: Lom paprsku světla při přechodu mezi prostředímy o různém indexu lomu

Absorpce světla ve vodě je hlavním důvodem, proč jsou hluboké oceány a jezera modré nebo zelené. Za barvu vody také zodpovídá rozptyl světla. Ten nastává, když se paprsky odráží od částic ve vodě. Záření s kratší vlnovou délkou může zasáhnout drobnější částice, proto se v čisté vodě rozptyluje nejvíce modré světlo, což rovněž přispívá k modrému vzhledu oceánů a jezer. V zakalených vodách s většími částicemi se hojně rozptylují také ostatní barvy, a proto vynikne zelená, hnědá nebo i žlutá.

Plánování ponoru

Každý potápěč by si měl svůj ponor nejprve naplánovat. Co přesně to znamená? Jak jsme v předchozích odstavcích naznačili, je velmi důležité si spočítat maximální dobu, kterou můžeme pod vodou strávit. V potápěčské terminologii hovoříme o *času na dně*.

Abychom vůbec mohli určit, jak dlouho můžeme pod vodou být, musíme zjistit, jaké množství vzduchu máme k dispozici. Jak už bylo řečeno, většinou se používají lahve o objemu $V_1 = 12\,\mathrm{l}$ (či $20\,\mathrm{l}$) naplněné na tlak $p_1 = 200\,\mathrm{bar}$. Nás by však zajímalo, jaký objem by měl vzduch uvnitř za normálního tlaku $p_2 = 1\,\mathrm{bar}$. Teplota v plynové lahvi se po nějaké době stabilizuje na teplotu okolního prostředí, můžeme proto využít Boyleův–Mariottův zákon

$$V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2} = 12\,\mathrm{l} \cdot 200 = 2\,400\,\mathrm{l}\,.$$

Dále chceme znát tzv. *hladinovou spotřebu*. Ta nám říká, kolik litrů vzduchu vydýcháme za jednu minutu na hladině. Nyní se potopme do určité hloubky. Vzduch, který dýcháme, musí mít stejný tlak jako okolí, jinak bychom si mohli vážně poškodit plíce, které by se vnější a vnitřní tlak snažily vyrovnat. Dechová frekvence a vdechnutý objem přitom zůstávají stejné, protože plíce mají omezenou objemovou kapacitu. Z toho důvodu spotřebujeme ve větších hloubkách větší množství vzduchu než dle hladinové spotřeby. Teplota plynu uvnitř potápěčské lahve se během ponoru výrazně nemění. Proto z Boyleova–Mariottova zákona plyne, že když máme na hladině spotřebu například $20\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$, v $10\,\mathrm{m}$ budeme mít spotřebu $40\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$ a s každým dalším barem navíc se hodnota o $20\,\mathrm{l{\cdot}min^{-1}}$ navýší.

Když se tedy chceme potápět do $10\,\mathrm{m}$ a víme, že v lahvi máme $2\,400\,\mathrm{l}$ vzduchu, pod vodou můžeme zůstat maximálně $t = 2\,400/40\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{min}$.

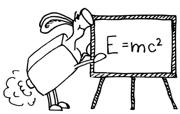
Je dobré počítat s nějakou rezervou. Po každém ponoru by nám v lahvi měl zbýt vzduch s tlakem alespoň 50 barů. Abychom se vyvarovali dekompresní nemoci, nesmíme překonat výstupovou rychlost $10\,\mathrm{m{\cdot}min^{-1}}$. Navíc když si plánujeme ponor do větších hloubek, kde překonáme nulový čas[9], musíme počítat s dekompresními přestávkami. V jaké hloubce a jak dlouhou musíme danou přestávku udělat, najdeme v *dekompresních tabulkách*[10], ovšem jakýkoliv ponor do 18 metrů je vždy v nulovém čase.

Závěr

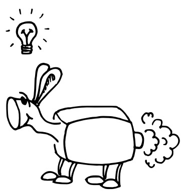
V tomto Výfučtení jsme objasnili spoustu zajímavých jevů týkajících se nejen fyziky, ale i méně známého světa potápění. Naučili jsme se, jak se správně vyvážit, jak si naplánovat ponor a jak se ve vodě neztratit, stejně jako na co si dávat pozor během ponoru.

Alena Mouchová
`alena.mouchova@vyfuk.org`

Vojtěch Kubrycht
`vojtech.kubrycht@vyfuk.org`



Řešení II. série



Úloha II.1 . . . Dlouhé vedení

5 bodů; průměr 4,28; řešilo 108 studentů

Viktorovi se zdálo, že jeho dlouhé elektrické vedení má moc velký odpor, a tak se rozhodl s tím něco udělat. Zvažuje dvě možnosti – buď stávající jednodrátové vedení rozdělí na dva paralelní vodiče o poloviční délce, nebo postaví zcela nové jednodrátové vedení, které by vedlo kratší trasou a mělo třetinovou délku. Pro kterou variantu se má Viktor rozhodnout, jestliže

[9] Nulový čas je maximální doba, kterou může potápěč strávit pod vodou bez dekompresních zastávek.

[10] `https://images.slideplayer.cz/42/11499218/slides/slide_5.jpg`

jeho cílem je co nejnižší celkový odpor? Uvažujte, že všechny použité vodiče jsou ze stejného materiálu a mají stejný průřez.

Odpor R se zvětšuje s délkou l vodiče, a tedy platí, že čím je drát delší, tím větší má odpor. Dále závisí hodnota odporu ještě na příčném průřezu drátu S a jisté materiálové konstantě ρ následujícím vztahem.

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Tyto parametry, na rozdíl od délky vodiče, však Viktor nemění, a proto nás dále nemusí trápit.

V prvním případě má každý z vodičů poloviční délku, a proto i poloviční odpor $R/2$. Celkový odpor R_1 dvou paralelně zapojených rezistorů (v našem případě drátů) o odporech R_a, R_b se vypočítá podle známého vzorce

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} \,.$$

Budou-li oba odpory stejné ($R_a = R_b$), bude výsledný odpor R_1 poloviční oproti odporu R_a jednoho z původních rezistorů.

$$R_1 = \frac{R_a^2}{2R_a} = \frac{R_a}{2} = \frac{R}{4}$$

Viktor tedy úpravami odpor vedení R snížil čtyřikrát.

Ve druhém případě Viktor pouze zkrátí vedení na třetinu, čímž se třikrát sníží jeho odpor.

$$R_2 = \frac{R}{3}$$

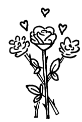
Porovnáním odporů R_1 a R_2 zjistíme, že zrealizováním první možnosti Viktor sníží celkový odpor výrazněji.

Natálie Lászlóová
`natalie.laszloova@vyfuk.org`

Alena Mouchová
`alena.mouchova@vyfuk.org`

Úloha II.2 ... Drahá láska

5 bodů; (chybí statistiky)



Adam je gentleman. Každý měsíc, který je se Soňou, jí dává růže. Pokaždé jí koupí tolik růží, kolik měsíců jsou spolu. Protože se ale sudý počet růží nedává, dostane Soňa v sudé měsíce o jednu růži více (např. ve 4. měsíci dostane 5 růží). Jestliže jedna růže stojí 75 Kč, kolik celkem utratí Adam za růže po dvou letech vztahu?

Nejdříve zjistíme, kolik květin Adam celkem koupí. Jejich počet odpovídá součtu všech přirozených čísel od 1 do 24, k němuž ještě přičteme 12 růží za všechny sudé měsíce v průběhu dvou let.

Součet čísel od 1 do $n = 24$ lze vyjádřit jako

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{24(25)}{2} = 300 \,.$$

Že vzorec platí, si můžeme ověřit například tak, že ke každému k-tému členu součtu přičteme $(n+1-k)$-tý člen. V našem případě dostaneme posloupnost 24 čísel

$$(1+24), (2+23), \ldots, (23+2), (24+1) \,.$$

Obecně tímto získáme n stejných čísel o hodnotě $n+1$, jejichž součet je dvojnásobkem součtu naší původní řady od 1 do n.

Soňa tedy dostane celkem $300 + 12 = 312$ růží. Ty by dohromady stály $312 \cdot 75\,\text{Kč} = 23\,400\,\text{Kč}$.

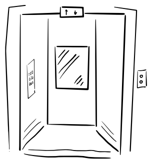
Adam za růže po dvou letech vztahu utratí 23 400 Kč.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha II.3 ... Kolejní výtahy

6 bodů; (chybí statistiky)



Lubor rád jezdí kolejním výtahem. Když jednou cestoval z nultého do šestnáctého patra, zamyslel se, kolik jedna taková cesta vlastně stojí. Kabina výtahu má hmotnost $m_1 = 700\,\mathrm{kg}$, Lubor váží $m_2 = 80\,\mathrm{kg}$ a výtah využívá protiváhu, která má hmotnost $m_3 = 500\,\mathrm{kg}$. Jedno patro je vysoké $h = 3\,\mathrm{m}$, pohybový aparát výtahu (motor, kladky, lana, kolejnice...) má účinnost $\eta = 80\,\%$ a kolej platí za kilowatthodinu elektřiny 5 Kč.

K určení ceny jedné Luborovy cesty výtahem budeme muset vypočítat množství elektrické energie, kterou výtah během své cesty spotřebuje. Pokud má motor výtahu (a zbytek zdvihací aparatury) účinnost η, budeme mu pro vykonání práce W muset dodat energii

$$E = \frac{W}{\eta}\,.$$

Práci, kterou motor výtahu během cesty vykoná, můžeme vyjádřit jako součin tahové síly F a dráhy s, na které tato síla působila. Pokud výtah ujede $n = 16$ pater a každé patro má výšku h, tak během cesty urazí dráhu $s = nh$.

$$W = Fs = Fnh$$

Zbývá nám určit, jakou silou musel motor výtahu působit na kabinu. Motor musí zároveň zvedat kabinu výtahu o hmotnosti m_1 a Lubora o hmotnosti m_2, musí tedy působit silou o velikosti tíhové síly působící na tato dvě tělesa

$$F' = (m_1 + m_2)g\,.$$

Stejným směrem jako síla F', tedy proti tíhové síle působící na kabinu výtahu a Lubora, působí síla, která vzniká jako důsledek působení tíhové síly na protiváhu o hmotnosti m_3. Tato síla „nadlehčuje“ závaží, motor výtahu tak nemusí působit silou F', ale jen silou

$$F = F' - m_3 g = (m_1 + m_2 - m_3)g\,.$$

Když už máme vyjádřenou sílu, kterou musí motor výtahu během cesty působit, můžeme ji dosadit do výše uvedeného vztahu pro práci:

$$W = (m_1 + m_2 - m_3)nhg\,.$$

Pro vykonání této práce budeme muset výtahu dodat energii

$$E = \frac{W}{\eta} = \frac{(m_1 + m_2 - m_3)nhg}{\eta}\,,$$

$$E = \frac{(700\,\mathrm{kg} + 80\,\mathrm{kg} - 500\,\mathrm{kg}) \cdot 16 \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{0{,}8} = 164{,}808\,\mathrm{kJ}\,.$$

Abychom mohli vypočítat, kolik cesta výtahem stála, budeme muset vypočítanou hodnotu energie převést do kilowatthodin – kWh. Jak již název této jednotky napovídá, jedná se o tisícinásobek součinu jednotek watt (W) a hodina (h). Watt je jednotkou výkonu, který je definován jako podíl energie a času. Je tedy zřejmé, že

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Watthodina, tedy bude odpovídat

$$1\,\mathrm{Wh} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}} \cdot 1\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}} \cdot 3\,600\,\mathrm{s} = 3\,600\,\mathrm{J}\,.$$

Stejně tak bude platit, že $1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,\mathrm{kJ}$. Touto úvahou jsme získali vyjádření jedné kWh v kJ, pro naše účely ale potřebujeme vztah přesně opačný. Ten získáme jednoduše vydělením obou stran rovnosti číslem 3 600

$$1\,\mathrm{kJ} = \frac{1}{3\,600}\,\mathrm{kWh}\,.$$

Využitím tohoto vztahu zjistíme, že 164,808 kJ odpovídá 0,045 78 kWh.

Teď už můžeme spočítat, jakou částku kolej za jednu Luborovu jízdu výtahem zaplatí, jednoduchým vynásobením ceny za kilowatthodinu $k = 5\,\mathrm{Kč{\cdot}kWh^{-1}}$ a spotřebované energie

$$C = kE = 5\,\mathrm{Kč{\cdot}kWh^{-1}} \cdot 0{,}045\,78\,\mathrm{kWh} \doteq 0{,}23\,\mathrm{Kč}\,.$$

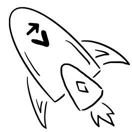
Kolej za Luborovu cestu výtahem do 16. patra zaplatí přibližně 23 haléřů.

Vojtěch Kubrycht
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Úloha II.4 ... Až na Měsíc

7 bodů; (chybí statistiky)

Viktor si vyrobil raketu vážící $m = 70\,\mathrm{g}$ s raketovým motorem s palivem o zanedbatelné hmotnosti a impulsem tahu[11] $I = 6\,\mathrm{N{\cdot}s}$. Po odpálení hořel raketový motor $t = 0{,}6\,\mathrm{s}$. Jak vysoko raketa vystoupala, než začala opět klesat? Předpokládejme kolmý start, zanedbatelný odpor vzduchu a konstantní průběh síly, kterou motor působí na raketu.



Let rakety směrem vzhůru rozdělíme na dvě části podle působících sil. V první fázi, kdy hoří palivo raketového motoru, působí na raketu kromě svislé tíhové síly F_g také tahová síla motoru F_t, která má opačný směr vzhledem k F_g. Po uplynutí času $t = 0{,}6\,\mathrm{s}$ začne druhá fáze, kdy přestane motor generovat tah a bude působit jen síla F_g, která bude zpomalovat raketu, až dojde k jejímu úplnému zastavení v hledané výšce h a následnému pádu dolů. Budeme tedy chtít spočítat dráhu letu v obou fázích, výšku h pak dostaneme jako jejich součet.

Chceme-li znát výšku dosaženou v první fázi, musíme nejdříve určit zrychlení způsobené tahem motoru. K tomu využijeme druhý Newtonův zákon a impuls tahu I, z něhož snadno určíme sílu

$$F_\mathrm{t} = \frac{I}{t} \quad\Rightarrow\quad a_\mathrm{t} = \frac{F_\mathrm{t}}{m} = \frac{I}{mt}\,,$$

[11] *Impuls síly* je definován jako součin dané síly a času, po který síla působí. Tato definice však platí pouze pro sílu neměnnou s časem.

Raketa se bude pohybovat s celkovým zrychlením $a = a_\mathrm{t} - g$. Dráha uražená při daném zrychlení za čas t bude

$$h_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(a_\mathrm{t} - g\right)t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{mt} - g\right)t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{It}{m} - gt^2\right) \doteq 24\,\mathrm{m}\,.$$

Po spotřebování raketového paliva se již bude jednat pouze o rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_0 a zrychlením g. Abychom zjistili dráhu druhé fáze stoupání, potřebujeme znát počáteční rychlost druhé fáze. Je to rychlost, kterou dosáhla raketa za čas t se zrychlením a

$$v_0 = at = (a_\mathrm{t} - g)t = \left(\frac{I}{mt} - g\right)t = \frac{I}{m} - gt = \frac{I - gmt}{m}\,.$$

Všechnu svou kinetickou energii $E_\mathrm{k} = mv_0^2/2$ využije raketa na zvýšení své potenciální energie o $E_\mathrm{p} = mgh_2$. Z rovnosti těchto dvou energií dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(I - gmt)^2}{2gm^2} \doteq 325\,\mathrm{m}\,.$$

Výslednou výšku, do níž raketa vystoupala, dostaneme jako součet výše získaných mezivýsledků

$$h = h_1 + h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{It}{m} - gt^2\right) + \frac{(I - gmt)^2}{2gm^2} \doteq 349\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme, že Viktorem vyrobená raketa se dostala do výšky skoro 350 m. Ovšem vzhledem k tomu, že jsme zanedbali odpor vzduchu a spoustu parametrů známe poměrně nepřesně, je výška výstupu rakety zaokrouhlená na stovky metrů (tj. $h \doteq 300\,\mathrm{m}$) adekvátní odhad.

Lukáš Linhart
`lukas.linhart@vyfuk.org`

Úloha II.5 ... Zalévání zahrady

8 bodů; průměr 5,17; řešilo 143 studentů

Jarda se rozhodl pokropit hadicí svou zahrádku. Proudem vody ale dosáhne maximálně do vzdálenosti $d = 12\,\mathrm{m}$.

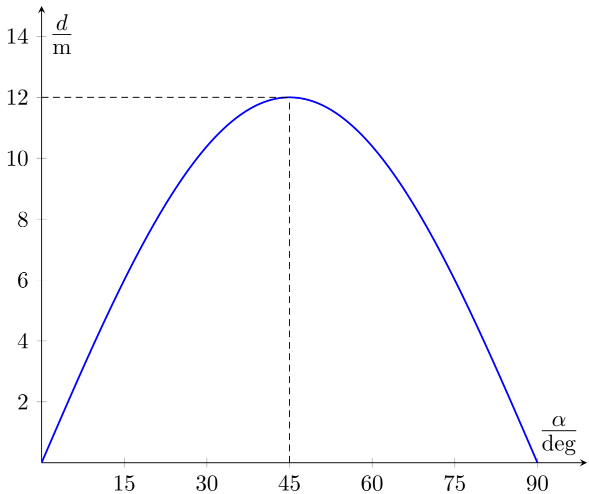
1. *Pod jakým úhlem vůči zemi (tzv.* elevačním*) Jarda drží hadici, stříká-li právě do oné maximální vzdálenosti $d = 12\,\mathrm{m}$? Jakou rychlostí opouští voda konec hadice?*
2. *Aby Jarda zvýšil rychlost vody, zmáčknul ústí hadice, které mělo původně kruhový průřez o poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$, do elipsovitého tvaru o poloosách $a = 1{,}4\,\mathrm{cm}$ a $b = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Kolikrát rychleji začala voda z hadice proudit?*
3. *Do jaké vzdálenosti nyní Jarda dostříkne?*

Při počítání zanedbejte odpor vzduchu a uvažujte, že ústí hadice se nachází přibližně ve stejné výšce jako záhony, které Jarda kropí.

1. Proud vody tryskající z hadice si lze představit jako soustavu několika kapiček, které jsou vrhány rychlostí v pod úhlem α.Takový vrh můžeme modelovat tzv. *šikmým vrhem*[12], pro který známe vztah pro vzdálenost, do níž kapky doletí.

$$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{1}$$

Z této rovnice můžeme vyčíst několik zajímavostí. Zaprvé, vzdálenost d závisí přímo úměrně na funkci $\sin 2\alpha$. Chceme-li tedy maximalizovat tuto vzdálenost, musíme se ptát, pro který úhel α je hodnota výrazu $\sin 2\alpha$ největší. Obecně goniometrická funkce $\sin x$ kolísá mezi hodnotami -1 a 1 a má své maximum v bodě $x = 90\,^\circ$ (pokud se zabýváme pouze úhly od $0\,^\circ$ do $360\,^\circ$). Vzhledem k tomu, že v našem případě x odpovídá 2α, je funkce $\sin 2\alpha$ a tedy i vzdálenost d maximální pro elevační úhel $\alpha = 45\,^\circ$. Na celou závislost vzdálenosti dopadu d na elevačním úhlu α se můžete podívat na obrázku 2.



Obrázek 2: Závislost vzdálenosti doletu na elevačním úhlu

Pokud známe elevační úhel ($\alpha = 45\,^\circ$), vzdálenost doletu kapek vody ($d = 12\,\mathrm{m}$) a tíhové zrychlení ($g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), dokážeme z rovnice (1) zjistit rychlost výtoku vody v_1.

$$v_1 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}} \doteq 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Rychlost výtrysku vody z hadice je tedy přibližně $11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

2. Při zúžení konce hadice se změní obsah jeho průřezu z původního S_1 na nový obsah S_2. Díky tomu se určitým způsobem změní i rychlost výtoku. Abychom zjistili, kolikrát se

[12] Pokud ještě nemáte mechaniku vrhů tolik osvojenou, doporučujeme si přečíst toto Výfučtení `https://vyfuk.org/_media/ulohy/r9/vyfucteni/serial3.pdf`.

rychlost výtoku změní, použijeme veličinu zvanou objemový průtok, která je definována jako součin obsahu průřezu a rychlosti toku určitým průřezem, $Q = Sv$. Říká nám, kolik vody proteče hadicí za určitý čas. Toto množství se v průběhu nemění, jelikož do hadice je voda vháněna pořád stejně rychle. Musí tedy platit $Q_1 = Q_2$, čili

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \,,$$

z čehož lze určit poměr p rychlostí proudu po a před zúžením jako

$$p = \frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2} \,.$$

Teď už stačí určit, čemu je rovno S_1 a S_2. Víme, že nejprve má konec hadice tvar kruhu, jehož obsah spočteme jako $S_1 = \pi r^2$. V druhém případě má hadice elipsovitý průřez, jehož obsah lze určit pomocí poloos elipsy a a b jako $S_2 = \pi ab$. Poměr rychlostí tak bude

$$p = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{r^2}{ab} \doteq 1{,}4 \,.$$

Voda po zúžení konce hadice stříká 1,4krát rychleji.

3. Zjistili jsme, že nová rychlost, kterou má voda po vystříknutí z hadice, je $v_2 = pv_1$. K vypočtení nové vzdálenosti dostřiku vody d_2 můžeme použít opět vzorec (1).

$$d_2 = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(pv_1)^2 \sin 2\alpha}{g} = p^2 \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} = p^2 d \doteq 24\,\mathrm{m}$$

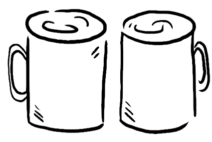
Jarda po zmáčknutí hadice dosáhne proudem vody až do vzdálenosti 24 m.

Michal Stroff
michal.stroff@vyfuk.org

Úloha II.E ... Ozářené mléko

8 bodů; průměr 0; řešilo 0 studentů

Hedvi s Patrikem si chtěli v mikrovlnce ohřát 2 hrnky mléka najednou, nedokázali se však shodnout, jak dlouho se musí mléko ohřívat. Hedvi tvrdí, že 2 hrnky se budou ohřívat dvakrát déle než jeden hrnek, ovšem Patrik namítá, že se ohřejí za stejný čas jako jeden. Experimentálně zjistěte, kdo z nich má pravdu, a zkuste vysvětlit, proč tomu tak je. Pro měření můžete použít místo mléka vodu.



Teorie

Mikrovlnná trouba oproti obyčejné pečící troubě ohřívá jídlo rozdílně. V pečící troubě běžně probíhá ohřev jídla prouděním a přestupem tepla ze vzduchu na potravinu. Topná tělíska umístěná v horní a dolní části trouby ohřívají vzduch, který následně proudí uvnitř trouby a ohřívá jídlo. Nezáleží tedy, co do trouby vložíme – klasická kuchyňská trouba na pečení ohřeje vše.

Oproti tomu se mikrovlnná trouba zaměřuje primárně na ohřátí jedné specifické, všudypřítomné látky – vody. Přesněji jejích molekul. Speciální součástka v mikrovlnce zvaná *magnetron* vytváří elektromagnetické záření o frekvenci 2,45 GHz, které dokáže rozkmitat molekuly vody, což se projeví zvýšením její teploty. Jelikož se voda nachází prakticky ve všech jídlech, jejich ohřátí není problém. Způsob ohřevu pomocí mikrovln se projeví i v tom, že jídlo se ohřívá v celém svém objemu, ne tedy od povrchu dolů, jako u pečící trouby. I proto se jídlo v mikrovlnce ohřeje tak rychle.

Jelikož se v mikrovlnce šíří elektromagnetické vlny, dochází k vytvoření tzv. *stojatých vln.* Určitě jste vypozorovali, že někdy se v mikrovlnce ohřeje pouze část jídla, zatímco jiná zůstane podstatně studenější. V určitých místech mikrovlnky se vytvoří kmitny, tedy místa, kde se vlny „sečtou“, a uzly, kde se naopak vlny „odečtou“ (vyruší). V kmitnách můžeme následně pozorovat rychlý ohřev a v uzlech naopak zachování původní teploty.

Ústřední otázka tohoto experimentu spočívá v tom, zda dva od sebe vzdálené předměty ovlivňují navzájem svou přítomností rychlost ohřevu toho druhého předmětu. V klasické troubě by víceméně měla rychlost ohřevu záviset pouze na okolní teplotě, která je dána výkonem topných tělísek. Takže pokud by byly předměty dostatečně daleko od sebe, neměly by si navzájem ovlivňovat rychlost ohřevu. Ovšem u mikrovlnky probíhá ohřev pomocí elektromagnetických vln, které jsou samozřejmě částečně blokovány ohřívaným předmětem. Dvě tělesa ohřívaná společně by si tedy měla navzájem rušit vlny, které jim dodávají energii, a zpomalovat tak rychlost ohřevu. Jak moc je tento efekt výrazný, se pokusíme naměřit.

Provedení experimentu

Na provedení experimentu jsme použili tři identické hrnky (abychom mohli po každém měření rovnou vzít aspoň jeden hrnek o pokojové teplotě na další měření), odměrný válec, kuchyňský teploměr a samozřejmě mikrovlnku. Provedli jsme celkem dvě sady měření. V první sadě byla voda o objemu 250 ml s počáteční teplotou $t_1 = 22{,}1\,°\mathrm{C}$. Tu jsme ohřívali po dobu 60 s. Zároveň jsme zkoušeli ohřívat vodu ve dvou různých pozicích, ve středu otočného talíře a na jeho okraji, abychom zjistili, jak si navzájem hrnky blokují vlny v závislosti na poloze. V druhé sadě jsme experiment provedli identicky, avšak s delší dobou ohřevu 120 s a počáteční teplotou $t_2 = 23{,}1\,°\mathrm{C}$. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 2.

Jako výsledek experimentu nás zajímá rozdíl teplot, o které se voda ohřála. Odečteme tedy počáteční teplotu od výsledných teplot. Pro dva hrnky počítáme aritmetický průměr teplot z obou hrnků. Nakonec podělíme změnu teploty vody v případě ohřevu jednoho hrnku Δt_1

$$p = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

Pokud očekáváme, že se navzájem hrnky nebudou ovlivňovat, tedy že se voda pro jeden a dva hrnky ohřeje za daný čas na stejnou teplotu, měl by poměr p vyjít 1. Pokud by si naopak všechnu energii, kterou by absorboval jeden hrnek sám v mikrovlnce, rozdělily rovným dílem, a tudíž by se ohřály pouze na poloviční teplotu, měli bychom dostat poměr $p = 2$.

Nutno ještě poznamenat, že jsme *neodstraňovali* otáčecí mechanismus mikrovlnky. Pokud bychom ho odstranili a neměli zrovna štěstí, mohlo by se stát, že umístíme hrnky do uzlů stojatých vln a nebudou se vůbec ohřívat, tím pádem by byly naše výsledky neplatné.

Výsledky měření

Z tabulky 3 je zřejmé, že pravdu měla spíše Hedvika, poměry p jsou až na jednu výjimku 1,9. Voda ve dvou hrnečcích se ohřála na poloviční teplotu. Aby se ohřála na teplotu vody v jednom hrnku, musela by se ohřívat přibližně dvakrát tak dlouho, pokud se rychlost ohřevu nemění v čase či s teplotou (což je pro nějaké menší změny teplot nepochybně pravda).

doba ohřívání (s)	počet hrnků	t uprostřed (°C)	t na kraji (°C)
60	1	57,4	53,1
	2	40,5	38,2
120	1	71,6	73,2
	2	53,5	49,5

Tabulka 2: Teplota naměřená po ohřátí

doba ohřívání (s)	počet hrnků	Δt uprostřed (°C)	p	Δt na kraji (°C)	p
60	1	35,3	1,9	31,0	1,6
	2	18,4		16,1	
120	1	48,5	1,9	50,1	1,9
	2	30,4		26,4	

Tabulka 3: Relativní změny teploty

Diskuze a závěr

V průběhu experimentu jsme se snažili kontrolovat vliv polohy hrnku v mikrovlnné troubě. Cílem bylo zjistit, zda pozice kmiten a uzlů nedokáže ovlivnit rychlost ohřevu. Z měření se však tato závislost nijak výrazně neprojevila. Tento vliv byl pravděpodobně z velké části eliminován právě otáčením hrnků na skleněném talíři, a tudíž došlo k rovnoměrnému a vyrovnanému ohřevu.

Kromě vody se zároveň ohřívaly i hrnky. Ačkoliv jsme si použitím tří hrnků hlídali jejich počáteční teplotu, je možné, že během měření teploty vody měly už trochu vyšší teplotu než voda sama. Další nejistota měření také mohla být způsobena použitím kuchyňského teploměru, u něhož výrobce neuvádí přesnost. Do nejistoty mohla ještě přispět časová prodleva mezi koncem ohřevu a měřením teploty.

Díky výsledkům našeho měření musel dát Patrik za pravdu Hedvi. Abychom dva hrnky ohřáli na stejnou teplotu jako jeden hrnek, musíme je ohřívat téměř dvakrát tak dlouho.

Hedvika Kršková
hedvika.krskova@vyfuk.org

Patrik Kašpárek
patrik.kasparek@vyfuk.org

Úloha II.V ... Odporná

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček si postavil hřiště na pétanque na svém oblíbeném jezerním ostrůvku. Jelikož se ale nechtěl vždy přepravovat plaváním, napnul mezi pevninou a ostrovem dlouhé lano, k němuž si postavil vor. Nastoupil na něj a začal se přitahovat po laně k ostrovu konstantní silou F. Na začátku spustil stopky.

1. *První polovinu vzdálenosti mezi pevninou a ostrovem překonal za $t_1 = 115\,\mathrm{s}$. Zrychlil a druhý úsek urazil za pouhých $t_2 = 86\,\mathrm{s}$. Kolikrát větší silou táhl Výfuček za lano ve druhé polovině cesty než původní silou F? Kolikrát se zvýšil jeho výkon? Vor se během cesty neotáčí ani nemění svůj ponor a voda kolem něj proudí turbulentně.*

2. *Na ostrově začal hrát pétanque. Zdálo se mu, že jsou pétanquové koule těžší, než si pamatuje. Rozhodl se, že zkusí zjistit, zda omylem nekoupil místo koulí o hmotnosti* 0,65 kg *koule o vyšší hmotnosti. Po chvíli přemýšlení si uvědomil, že mu stačí pouze stopky a skládací metr.*

   Nejprve pomocí metru zjistil, že koule mají průměr $d = 8{,}0\,\mathrm{cm}$. *Pak popojel na voru na mělčinu a naměřil zde hloubku* $h = 2{,}7\,\mathrm{m}$. *Nad touto hloubkou vhodil jednu z koulí svisle do vody a změřil čas, za který se potopila až na dno. Měření času několikrát zopakoval a nakonec spočetl průměrný čas* $t = 1{,}3\,\mathrm{s}$.

   Na základě Reynoldsova čísla rozhodněte, zda voda kouli při jejím ponoru obtéká laminárně, či turbulentně. Koule zrychlí na svou terminální rychlost téměř okamžitě.

3. *Určete hmotnost koule.*

1. Vor se pohybuje konstantní rychlostí, tedy rovnoměrně přímočaře. To podle prvního Newtonova zákona znamená, že jsou všechny síly, které na něj působí, v rovnováze. Velikost síly F, kterou se Výfuček přitahuje po laně k ostrovu, tedy bude rovna velikosti odporové síly F_o, kterou působí voda na vor.

   $$F = F_\mathrm{o}$$

   Poměr sil, kterými Výfuček působí v prvním a druhém úseku, bude stejný jako poměr odporových sil působících na vor v těchto úsecích.

   $$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_{\mathrm{o}1}}{F_{\mathrm{o}2}}$$

   Odporovou sílu působící na vor si díky turbulentnímu proudění v kapalině snadno vyjádříme z Newtonova odporového zákona jako

   $$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} S\rho C v^2\,.$$

   Pro rychlost v v obou úsecích platí

   $$v = \frac{s}{t}\,,$$

   kde s je polovina vzdálenosti Výfučka od ostrova a t je čas, za který tuto dráhu urazil.

   Síla F_1 v první polovině cesty k ostrovu je tedy

   $$F_1 = F_{\mathrm{o}1} = \frac{1}{2} S\rho C v_1^2 = \frac{1}{2} S\rho C \frac{s^2}{t_1^2}\,.$$

   A pro druhou polovinu analogicky platí

   $$F_2 = F_{\mathrm{o}2} = \frac{1}{2} S\rho C v_2^2 = \frac{1}{2} S\rho C \frac{s^2}{t_2^2}\,,$$

   kde obsah průřezu S, hustota vody ρ a odporový koeficient C jsou v obou polovinách cesty stejné. Nyní vyjádříme poměr obou odporových sil, čímž získáme i poměr sil, kterými Výfuček táhne za lano.

   $$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_{\mathrm{o}2}}{F_{\mathrm{o}1}} = \frac{S\ \rho C s^2/2t_2^2}{S\rho C s^2/2t_1^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \doteq 1{,}8$$

Výfuček tedy ve druhé polovině cesty k ostrovu působil 1,8krát větší silou.

Výkon P potom snadno vypočítáme jako podíl práce ($W = Fs$) a času

$$P = \frac{Fs}{t} .$$

Pro poměry obou výkonů tedy stačí opět dosadit pro oba úseky příslušné veličiny

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{F_2 s/t_2}{F_1 s/t_1} = \frac{F_2}{F_1}\frac{st_1}{st_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3} \doteq 2{,}4 .$$

V druhém kroku jsme si pouze vytkli poměr sil a dosadili za něj řešení předešlé části, tedy poměr druhých mocnin časů, za které Výfuček jednotlivé úseky urazil.

Výfučkův výkon se v druhém úseku zvýšil 2,4krát.

2. Reynoldsovo číslo zjistíme pomocí vztahu

$$\mathrm{Re} = \frac{v\rho d}{\eta} .$$

Za předpokladu, že koule zrychlí na svou terminální rychlost téměř okamžitě, můžeme její ponor popsat jako rovnoměrný přímočarý pohyb (čili můžeme psát $v = h/t$, kde je v terminální rychlost). Nyní můžeme dosadit rychlost v a dynamickou viskozitu η (ta je pro vodu při pokojové teplotě přibližně $1\,\mathrm{mPa\cdot s}$, jak bylo uvedeno ve Výfučtení), dostaneme

$$\mathrm{Re} = \frac{h\rho d}{\eta t} \doteq 200\,000 .$$

Tato hodnota nám může říct, o jaký typ proudění jde. Jelikož hodnota Reynoldsova čísla vysoce převyšuje hodnotu 10 000, můžeme bezpečně prohlásit, že voda proudí kolem koule turbulentně.

3. K výpočtu hmotnosti koule opět využijeme první Newtonův zákon. Koule se potápí téměř celou dobu terminální rychlostí, všechny síly působící na kouli tedy musejí být v rovnováze. Na kouli působí hned tři síly – tíhová, vztlaková a odporová. Druhé dvě zmíněné zmíněné působí stejným směrem – proti síle tíhové.

Můžeme tedy psát

$$F_G = F_{\mathrm{vz}} + F_{\mathrm{o}} .$$

Vztlaková síla je rovna součinu objemu koule ($V = 4\pi r^3/3$), hustoty kapaliny ρ a tíhového zrychlení.

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

Vzhledem k tomu, že voda obtéká kouli turbulentně (jak jsme si ověřili v předchozí podúloze), vyjádříme odporovou sílu z Newtonova odporového zákona jako

$$F_{\mathrm{o}} = \frac{1}{2} S\rho C v^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \rho C \frac{h^2}{t^2} .$$

Nyní vše dosadíme zpět do původní rovnice a vyjádříme z ní hmotnost. Poté dosadíme zadané hodnoty a koeficient odporu koule $C = 0{,}5$

$$m = \frac{4\pi r^3 \rho g/3 + \pi r^2 \rho h^2 C/2t^2}{g} = \pi \rho r^2 \left(\frac{4r}{3} + \frac{h^2 C}{2gt^2} \right) = 0{,}82\,\mathrm{kg}\,.$$

Hmotnost koule je 0,82 kg. Výfuček opravdu omylem koupil těžší koule.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: https://vyfuk.org
e-mail: vyfuk@vyfuk.org

/ksvyfuk *@ksvyfuk*

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.