Výfučtení: Bez odporu k odporu

Úvod

Začíná podzim, který s sebou přináší spoustu větrného počasí. Stromy se pod poryvy větru ohýbají, větrné mlýny se točí jako o závod a konce kabátů kolemjdoucích zuřivě vlají. Všechny tyto větrné nepříjemnosti má na svědomí jedna často opomíjená síla. A tou je síla odporu vzduchu.

V tomto Výfučtení se detailně podíváme, jak popsat fyzikálně situaci, v níž při vzájemném pohybu pevného tělesa a plynného či kapalného prostředí vzniká síla brzdící tento pohyb, běžně nazývaná jako *odporová síla*. Než se však pustíme do našeho zkoumání, musíme poznamenat, že se tematicky i úrovní jedná o rozšíření klasické školní mechaniky, tudíž je potřeba dobře zvládat témata jako energie[1], Newtonovy zákony[2], zrychlení... Doporučujeme si tedy nejdřív tyto oblast fyziky trošku oprášit.

Terminální rychlost

Začneme nejtypičtějším případem, kdy nějaké prostředí klade pohybu určitého tělesa odpor. Představme si, že pustíme těleso, např. fotbalový míč, z velmi vysoké věže a budeme pozorovat, jak se mění jeho rychlost v čase. Pokud bychom zanedbali odpor vzduchu, víme, že rychlost v padajícího tělesa by se s časem t vyvíjela dle známého vztahu

$$v = gt\,,$$

kde g značí tíhové zrychlení. Vidíme tedy, že rychlost padajícího míče by měla neustále růst přímo úměrně času. Jak ale bude růst rychlost tělesa, jež se při svém pádu musí navíc prodírat vzdušným prostředím kolem sebe?

Asi si dovedeme představit, že ze začátku, kdy těleso bude teprve nabírat rychlost, bude odpor vzduchu malý (proti tělesu bude pomyslný vítr ještě slabě „foukat“). S postupem času však s rostoucí rychlostí tělesa bude růst i síla odporu, který klade okolní vzduch na padající těleso. Proti tíhové síle, která urychluje pád míče, najednou začne výrazně působit druhá síla, tzv. *odporová*. Obě síly se navzájem odečtou a jejich výslednice bude stále směřovat dolů, nicméně bude výrazně menší než sama síla tíhová.

Výsledná síla působící na těleso poté, co nabralo větší rychlost, ho bude stále urychlovat směrem dolů, ovšem nyní již s menším zrychlením (jak lze usoudit z 2. Newtonova zákona, zákona síly).

Budeme-li pozorovat míč dál, zjistíme, že bude i přes kladený odpor navyšovat svou rychlost pádu, leč pomaleji. Nakonec se v jednu chvíli musí zaručeně stát (pokud těleso dřív nedopadne na zem), že se odporová síla vzduchu působící na těleso vyrovná s tíhovou silou[3] a výslednice obou sil se stane nulovou. V tomto momentě začne pro těleso platit 1. Newtonův zákon, zákon setrvačnosti, přestane zrychlovat a bude tudíž padat stálou rychlostí. Tato konečná rychlost, na níž se pád míče ustálí, se nazývá *terminální rychlost*.

[1] `https://vyfuk.org/_media/ulohy/r12/s1/vyfucteni1.pdf`

[2] `https://vyfuk.org/_media/ulohy/r8/vyfucteni/vyfucteni_1.pdf`

[3] Do rovnosti bychom měli správně započítat i vztlakovou sílu, ale ta je v případě míče ve vzduchu zanedbatelná.

Výpočet odporové síly

Nyní se pokusíme využít případu míče padajícího terminální rychlostí k nalezení zákona, který by nám řekl, jak velký odpor okolní prostředí na těleso vyvíjí při dané rychlosti pádu.

Nechť tedy míč padá terminální rychlostí a působí na něj odporová síla F_o, která je v takovém případě, jak již víme, rovna tíhové síle působící na míč F_g. Nechme míč při pádu urazit dráhu s a spočtěme práci W, kterou vykonala tíhová síla v tomto úseku pádu. Z definice práce dostaneme

$$W = F_\mathrm{g} s = F_\mathrm{o} s\,. \tag{1}$$

U tíhového pole platí, že práce, kterou vykoná tíhová síla, odpovídá poklesu potenciální energie tělesa. Ze zákona zachování energie víme, že o kolik potenciální energie poklesne, o tolik se musí jiná forma energie navýšit. U volného pádu se zpravidla potenciální energie tělesa mění na kinetickou. Zde to tak ovšem nefunguje, jelikož míč svou rychlost už nemění. Potenciální energie míče $W = F_\mathrm{g} s$ tedy musí být předána něčemu jinému, a to právě okolnímu vzduchu.

Míč při svém pohybu rozráží vzduchovou bariéru a víří tak vzduch kolem sebe, jinými slovy předává mu kinetickou energii. Nyní můžeme vyslovit předpoklad, že veškerá potenciální energie W míče se přemění na kinetickou energii rozvířeného vzduchu E_k.[4]

Řekněme, že vzduch těsně po rozvíření nabere neznámou charakteristickou rychlost v_vzduch. Pokud tedy těleso rozvíří vzduchový sloupec o hmotnosti m, předá mu kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{vzduch}^2\,.$$

Z našeho předpokladu výše víme, že kinetická energie tohoto rozvířeného vzduchového sloupce je rovna změně potenciální energie tělesa W. Můžeme tedy psát

$$W = \frac{1}{2} m v_\mathrm{vzduch}^2\,,$$

kde W lze přepsat podle vztahu (1).

$$F_\mathrm{o} s = \frac{1}{2} m v_\mathrm{vzduch}^2 \tag{2}$$

Teď si zkusíme popsat hmotnost vzduchu obsaženého ve sloupci. Spadne-li náš míč o výšku s, prorazí tak celkem vzduch o objemu válce s výškou s a obsahem podstavy $S = \pi r^2$, kde r je poloměr míče. Objem takového válce spočteme jako $V = Ss$. Zároveň si vzpomeňme, že hmotnost tělesa m lze určit jako součin jeho hustoty ρ a objemu V.

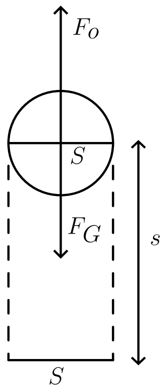
$$m = \rho V = \rho S s$$

Po dosazení do předchozí rovnice (2) získáme

$$F_\mathrm{o} s = \frac{1}{2} \rho S s v_\mathrm{vzduch}^2 \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} \rho S\, v_\mathrm{vzduch}^2\,. \tag{3}$$

Těmito úpravami jsme si úspěšně vyjádřili čistě odporovou sílu F_o. Bohužel však náš vzorec obsahuje neznámou rychlost rozvířeného vzduchu v_vzduch, kterou jen stěží dokážeme v praxi určit, proto jako závěrečný krok učiníme jednu úvahu. Čím rychleji těleso padá a proráží vzduch,

[4] Tento předpoklad nabývá platnosti v případě, kdy těleso padá poměrně pomalu a nezahřívá se vlivem tření s okolním vzduchem. Potenciální energie se tak nemění na teplo.



Obrázek 1: Těleso padající terminální rychlostí

tím rychleji musí být také vzduch odfoukáván pryč z cesty padajícímu tělesu.[5] Znamená to tedy, že rychlost rozvířeného vzduchu v_{vzduch} musí být přímo úměrná rychlosti pádu tělesa v. Matematicky lze tento fakt zapsat rovnicí přímé úměrnosti

$$v_{\text{vzduch}} = kv\,,$$

kde $k \in \mathbb{R}^+$ je číselný (bezrozměrný, tzn. nemá jednotku) koeficient přímé úměrnosti. Dosadíme-li tento vztah do rovnice pro odporovou sílu (3), získáme vzorec

$$F_\text{o} = \frac{1}{2}\rho S k^2 v^2\,.$$

Číslo k^2 je zvykem označovat písmenem C.

$$F_\text{o} = \frac{1}{2}\rho S C v^2$$

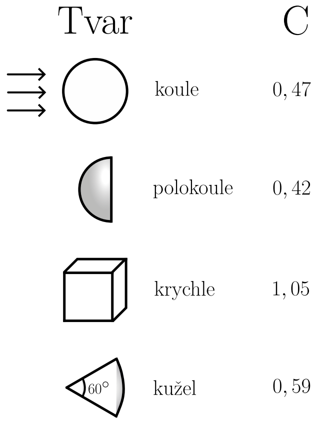
Odvodili jsme nyní zákon, který se nazývá *Newtonův zákon odporu*. Určuje sílu, kterou klade tekutina[6] o hustotě ρ odpor tělesu pohybujícímu se v tomto tekutém prostředí rychlostí v. Veličina S pak odpovídá tzv. *obsahu průřezu*, což je plocha, kterou zabírá těleso z pohledu ve směru pohybu. Číslo C se nazývá *Newtonův odporový koeficient* a je dáno čistě tvarem tělesa a směrem dopadu částic tekutiny na těleso. Např. pro tělesa s více aerodynamickým tvarem je tento koeficient velmi malý, menší než 1, kdežto kupříkladu pro padák toto číslo spolehlivě přesahuje hodnotu 1. Odporové koeficienty různých těles můžete vidět na následujícím obrázku.

Laminární vs. turbulentní proudění

Doteď jsme uvažovali takovou tekutinu (konkrétně vzduch), která se při průletu nějakého tělesa snadno rozvíří. Takové vířivé proudění se nazývá *turbulentní*. Nicméně asi si dovedeme představit, že existují také tekutiny, které se dají rozvířit těžko. Příkladem může být včelí med. Když

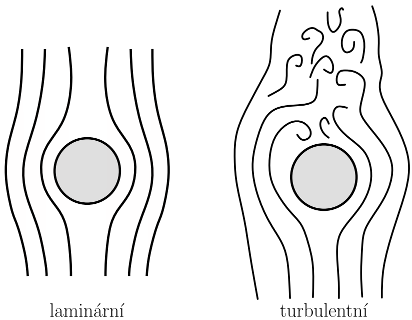
[5] Ti, kteří jsou již seznámeni s tzv. *rovnicí kontinuity*, mohou celou myšlenku lépe pochopit právě skrze tuto rovnici.

[6] Připomínáme, že *tekutiny* je souhrnný název pro kapaliny a plyny.



Obrázek 2: Newtonův odporový koeficient pro různá tělesa

vhodíme kuličku do sklenice s medem, bude padat, ale extrémně pomalu a rozhodně kolem ní nebude vznikat žádné víření. Proudění medu kolem kuličky má velmi blízko k tzv. *laminárnímu proudění*, při němž se částice kapaliny pohybují po rovnoběžných přímkách.[7]



Obrázek 3: Porovnání laminárního a turbulentního proudění

Jak ale vzniká odporová síla zde? Tekutiny jako med se vyznačují tím, že se jejich částice přitahují výrazně silněji než částice většiny jiných tekutin, třeba vody. Při potápění musí kulička překonávat tyto přitažlivé síly částic medu, které jsou primárním faktorem ztráty energie kuličky. Tímto mechanismem vzniká odporová síla v medu. Ten je ovšem zcela odlišný, nežli mechanismus víření vzduchu popsaný v předešlé kapitole. Dává smysl, že zákon, který bude popisovat odporovou sílu při pohybu v takových prostředích, bude vypadat jinak, než jsme zatím výše odvodili. V obecném formátu by byl takový zákon nesmírně složitý, proto si jen bez odvození uvedeme jeho speciální případ pro kouli o poloměru r.

$$F_\mathrm{o} = 6\pi\eta r v$$

[7] Částice medu samozřejmě musí kuličku nějak obcházet, proto se po dokonalých přímkách pohybovat nemohou. Nicméně nemají k tomu daleko, proto se i takovému proudění pro zjednodušení říká laminární.

Tento vzorec bývá nazýván jako *Stokesův zákon* a popisuje odporovou sílu tekutin, které určité kulové těleso obtékají přibližně laminárně. Veličina v zde opět značí rychlost koule vůči okolnímu prostředí a η je nová veličina charakterizující tekutinu. Souvisí právě s tím, jak silné jsou v ní mezičásticové síly, a říká se jí *dynamická viskozita*. Její hodnoty pro některé tekutiny můžete najít v tabulce 1.[8]

tekutina	$\frac{\eta}{\text{mPa}\cdot\text{s}}$
voda	1
slunečnicový olej	50
jogurt	150
med	2 000 − −10 000

Tabulka 1: Dynamická viskozita některých tekutin v jednotkách milipascalsekunda (mPa·s)

Vraťme se ale zpátky ke Stokesově zákonu a všimněme si, že odporová síla je tím větší, čím větší je

- rozměr kuličky,
- rychlost kuličky,
- mezičásticová přitažlivost v tekutině (viskozita).

První dva body jsou podobné jako u Newtonova zákona odporu s tím rozdílem, že zde ve vzorci vystupuje poloměr kuličky místo obsahu průřezu a první mocnina rychlosti místo druhé. Poslednímu bodu také rozumíme. Větší mezičásticové síly je těžší překonat a lépe tak brání tělesu v pohybu – kladou větší odpor.

A jak je rozeznat?

Představili jsme si dva vztahy pro odporovou sílu, z nichž každý přichází vhod v jiném případě. Stokesův zákon se užívá, když tekutina kolem sledovaného tělesa proudí spíše laminárně, kdežto Newtonův zákon má užití pro proudění více turbulentního charakteru. Otázkou ale zůstává, jak tyto dva případy od sebe rozeznat.

Řekli jsme si, že pro tekutiny s větší viskozitou η bude proudění spíše laminární. Naopak pro menší η bude tekutina proudit turbulentně. Zároveň je nám jasné, že čím větší bude šířka tělesa d (z pohledu směru pohybu), tím méně aerodynamické bude a bude tak vytvářet větší víry. Proudění tedy bude pro velká d víc turbulentní. Nakonec, pokud zvýšíme rychlost pohybu tělesa v tekutině v, začne ji více vířit a proudění tak získá turbulentní charakter.

Všechny tyto poznatky lze formulovat pomocí matematiky. Je-li výraz

$$\frac{vd}{\eta}$$

[8] `https://oilviscositychart.com/learn/viscosity-list.php`

hodně malý, proudění se chová spíše laminárně. Naopak velkým hodnotám tohoto zlomku odpovídá proudění turbulentní. Přenásobíme-li výraz hustotou prostředí (ρ), dostaneme tzv. *Reynoldsovo číslo*.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v d}{\eta}$$

Toto číslo rozhoduje o tom, zda je proudění laminární či turbulentní. Předem upozorňujeme, že slouží pouze jako hrubý odhad, mezi těmito dvěma typy neexistuje ostrá hranice. Nicméně pokud bychom si ji měli pro lepší představu stanovit, byla by řádově někde na tisících ($\mathrm{Re} \sim \sim 10^3$). Reynoldsovo číslo neuvažuje tvar tělesa, který také rozhoduje o tom, jak tekutina kolem něj proudí. Proto se tato hranice může lehce lišit u odlišných typů těles.[9] Abychom tedy mohli bezpečně prohlásit, že je proudění kolem určitého tělesa laminární, musí vyjít hodnota Reynoldsova čísla mnohonásobně menší než 1 000, a naopak pro čistě turbulentní proudění musí toto číslo silně převyšovat hodnotu 10 000. Pro představu jsme uvedli některé klasické případy a jejich Reynoldsova čísla v tabulce 2.[10]

objekt	Re
plavající bakterie	10^{-4}
letící moucha	10^1
letící vážka	10^3
plavající člověk	10^6
letící letadlo	10^7
plující Titanic	10^9

Tabulka 2: Řádový odhad Reynoldsova čísla některých objektů

Závěr

Nyní jste už seznámeni s problematikou, které se základoškolská i středoškolská fyzika mnohdy vyhýbá. Doufáme tedy, že až příště budete potřebovat nezanedbat v nějakém příkladu odpor vzduchu, uvědomíte si, že díky znalostem nabytým v tomto Výfučtení to není nic nemožného a že dokážete do svých kalkulací započítat i ten zapeklitý odpor!

Michal Stroff
`stroffis@vyfuk.org`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

[9] Při našem výkladu uvažujeme tělesa, která jsou přibližně stejně široká jako dlouhá. Pro úzká a zároveň protáhlá tělesa (např. křídlo letadla) se musí vyhodnocovat ještě jiné kritérium související s jejich délkou.

[10] `https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.0602043103`, `https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2017/cislo-12/hmyz-jako-dokonaly-letaci-stroj.html`