

Úloha II.V ... Odporná

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček si postavil hřiště na pétanque na svém oblíbeném jezerním ostrůvku. Jelikož se ale nechtěl vždy přepravovat plaváním, napnul mezi pevninou a ostrovem dlouhé lano, k němuž si postavil vor. Nastoupil na něj a začal se přitahovat po laně k ostrovu konstantní silou F . Na začátku spustil stopky.

1. První polovinu vzdálenosti mezi pevninou a ostrovem překonal za $t_1 = 115$ s. Zrychlil a druhý úsek urazil za pouhých $t_2 = 86$ s. Kolikrát větší silou táhl Výfuček za lano ve druhé polovině cesty než původní silou F ? Kolikrát se zvýšil jeho výkon? Vor se během cesty neotáčí ani nemění svůj ponor a voda kolem něj proudí turbulentně.
2. Na ostrově začal hrát pétanque. Zdálo se mu, že jsou pétanquové koule těžší, než si pamatuje. Rozhodl se, že zkusí zjistit, zda omylem nekoupil místo koulí o hmotnosti 0,65 kg koule o vyšší hmotnosti. Po chvíli přemýšlení si uvědomil, že mu stačí pouze stopky a skládací metr.

Nejprve pomocí metru zjistil, že koule mají průměr $d = 8,0$ cm. Pak popojel na voru na mělčinu a naměřil zde hloubku $h = 2,7$ m. Nad touto hloubkou vhodil jednu z koulí svisle do vody a změřil čas, za který se potopila až na dno. Měření času několikrát zopakoval a nakonec spočetl průměrný čas $t = 1,3$ s.

Na základě Reynoldsova čísla rozhodněte, zda voda kouli při jejím ponoru obtéká laminárně, či turbulentně. Koule zrychlí na svou terminální rychlost téměř okamžitě.

3. Určete hmotnost koule.

1. Vor se pohybuje konstantní rychlostí, tedy rovnoměrně přímočaře. To podle prvního Newtonova zákona znamená, že jsou všechny síly, které na něj působí, v rovnováze. Velikost síly F , kterou se Výfuček přitahuje po laně k ostrovu, tedy bude rovna velikosti odporové síly F_o , kterou působí voda na vor.

$$F = F_o$$

Poměr sil, kterými Výfuček působí v prvním a druhém úseku, bude stejný jako poměr odporových sil působících na vor v těchto úsecích.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_{o1}}{F_{o2}}$$

Odporovou sílu působící na vor si díky turbulentnímu proudění v kapalině snadno vyjádříme z Newtonova odporového zákona jako

$$F_o = \frac{1}{2} S \rho C v^2.$$

Pro rychlost v v obou úsecích platí

$$v = \frac{s}{t},$$

kde s je polovina vzdálenosti Výfučka od ostrova a t je čas, za který tuto dráhu urazil.

Síla F_1 v první polovině cesty k ostrovu je tedy

$$F_1 = F_{o1} = \frac{1}{2} S \rho C v_1^2 = \frac{1}{2} S \rho C \frac{s^2}{t_1^2}.$$

A pro druhou polovinu analogicky platí

$$F_2 = F_{o2} = \frac{1}{2} S \rho C v_2^2 = \frac{1}{2} S \rho C \frac{s^2}{t_2^2},$$

kde obsah průřezu S , hustota vody ρ a odporový koeficient C jsou v obou polovinách cesty stejné. Nyní vyjádříme poměr obou odporových sil, čímž získáme i poměr sil, kterými Výfuček táhne za lano.

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_{o2}}{F_{o1}} = \frac{S \rho C s^2 / 2t_2^2}{S \rho C s^2 / 2t_1^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \doteq 1,8$$

Výfuček tedy ve druhé polovině cesty k ostrovu působil 1,8krát větší silou.

Výkon P potom snadno vypočítáme jako podíl práce ($W = Fs$) a času

$$P = \frac{Fs}{t}.$$

Pro poměry obou výkonů tedy stačí opět dosadit pro oba úseky příslušné veličiny

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{F_2 s / t_2}{F_1 s / t_1} = \frac{F_2}{F_1} \frac{t_1}{t_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3} \doteq 2,4.$$

V druhém kroku jsme si pouze vytkli poměr sil a dosadili za něj řešení předešlé části, tedy poměr druhých mocnin časů, za které Výfuček jednotlivé úseky urazil.

Výfučkův výkon se v druhém úseku zvýšil 2,4krát.

2. Reynoldsovo číslo zjistíme pomocí vztahu

$$\text{Re} = \frac{v \rho d}{\eta}.$$

Za předpokladu, že koule zrychlí na svou terminální rychlost téměř okamžitě, můžeme její ponor popsat jako rovnoměrný přímočarý pohyb (čili můžeme psát $v = h/t$, kde je v terminální rychlost). Nyní můžeme dosadit rychlost v a dynamickou viskozitu η (ta je pro vodu při pokojové teplotě přibližně 1 mPa·s, jak bylo uvedeno ve Výfučtení), dostaneme

$$\text{Re} = \frac{h \rho d}{\eta t} \doteq 200\,000.$$

Tato hodnota nám může říct, o jaký typ proudění jde. Jelikož hodnota Reynoldsova čísla vysoce převyšuje hodnotu 10 000, můžeme bezpečně prohlásit, že voda proudí kolem koule turbulentně.

3. K výpočtu hmotnosti koule opět využijeme první Newtonův zákon. Koule se potápí téměř celou dobu terminální rychlostí, všechny síly působící na kouli tedy musejí být v rovnováze. Na kouli působí hned tři síly – tíhová, vztlaková a odporová. Druhé dvě zmíněné zmíněné působí stejným směrem – proti síle tíhové.

Můžeme tedy psát

$$F_G = F_{vz} + F_o .$$

Vztlaková síla je rovna součinu objemu koule ($V = 4\pi r^3/3$), hustoty kapaliny ρ a tíhového zrychlení.

$$F_{vz} = V\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

Vzhledem k tomu, že voda obtéká kouli turbulentně (jak jsme si ověřili v předchozí podúloze), vyjádříme odporovou sílu z Newtonova odporového zákona jako

$$F_o = \frac{1}{2}S\rho C v^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 \rho C \frac{h^2}{t^2} .$$

Nyní vše dosadíme zpět do původní rovnice a vyjádříme z ní hmotnost. Poté dosadíme zadané hodnoty a koeficient odporu koule $C = 0,5$

$$m = \frac{4\pi r^3 \rho g/3 + \pi r^2 \rho h^2 C/2t^2}{g} = \pi \rho r^2 \left(\frac{4r}{3} + \frac{h^2 C}{2gt^2} \right) = 0,82 \text{ kg} .$$

Hmotnost koule je 0,82 kg. Výfuček opravdu omylem koupil těžší koule.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.