Úloha II.5 ... Zalévání zahrady

8 bodů; průměr 5,17; řešilo 143 studentů

Jarda se rozhodl pokropit hadicí svou zahrádku. Proudem vody ale dosáhne maximálně do vzdálenosti $d = 12\,\mathrm{m}$.

1. *Pod jakým úhlem vůči zemi (tzv.* elevačním*) Jarda drží hadici, stříká-li právě do oné maximální vzdálenosti $d = 12\,\mathrm{m}$? Jakou rychlostí opouští voda konec hadice?*

2. *Aby Jarda zvýšil rychlost vody, zmáčknul ústí hadice, které mělo původně kruhový průřez o poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{cm}$, do elipsovitého tvaru o poloosách $a = 1{,}4\,\mathrm{cm}$ a $b = 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Kolikrát rychleji začala voda z hadice proudit?*

3. *Do jaké vzdálenosti nyní Jarda dostříkne?*

Při počítání zanedbejte odpor vzduchu a uvažujte, že ústí hadice se nachází přibližně ve stejné výšce jako záhony, které Jarda kropí.

1. Proud vody tryskající z hadice si lze představit jako soustavu několika kapiček, které jsou vrhány rychlostí v pod úhlem α.Takový vrh můžeme modelovat tzv. *šikmým vrhem*[1], pro který známe vztah pro vzdálenost, do níž kapky doletí.

$$d = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{1}$$

Z této rovnice můžeme vyčíst několik zajímavostí. Zaprvé, vzdálenost d závisí přímo úměrně na funkci $\sin 2\alpha$. Chceme-li tedy maximalizovat tuto vzdálenost, musíme se ptát, pro který úhel α je hodnota výrazu $\sin 2\alpha$ největší. Obecně goniometrická funkce $\sin x$ kolísá mezi hodnotami -1 a 1 a má své maximum v bodě $x = 90\,^\circ$ (pokud se zabýváme pouze úhly od $0\,^\circ$ do $360\,^\circ$). Vzhledem k tomu, že v našem případě x odpovídá 2α, je funkce $\sin 2\alpha$ a tedy i vzdálenost d maximální pro elevační úhel $\alpha = 45\,^\circ$. Na celou závislost vzdálenosti dopadu d na elevačním úhlu α se můžete podívat na obrázku 1.

Pokud známe elevační úhel ($\alpha = 45\,^\circ$), vzdálenost doletu kapek vody ($d = 12\,\mathrm{m}$) a tíhové zrychlení ($g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), dokážeme z rovnice (1) zjistit rychlost výtoku vody v_1.

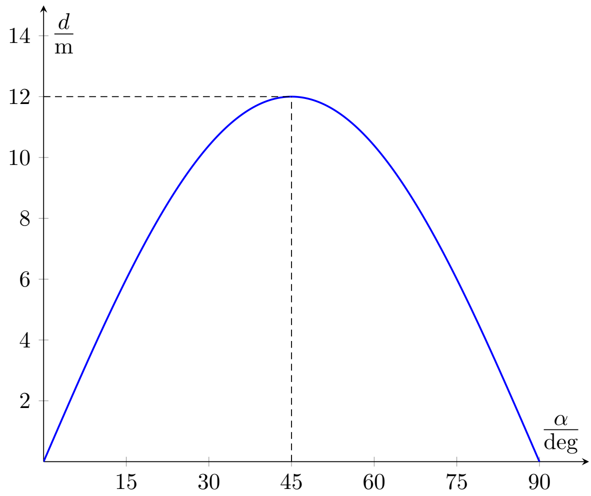
$$v_1 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}} \doteq 11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Rychlost výtrysku vody z hadice je tedy přibližně $11\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

2. Při zúžení konce hadice se změní obsah jeho průřezu z původního S_1 na nový obsah S_2. Díky tomu se určitým způsobem změní i rychlost výtoku. Abychom zjistili, kolikrát se rychlost výtoku změní, použijeme veličinu zvanou objemový průtok, která je definována jako součin obsahu průřezu a rychlosti toku určitým průřezem, $Q = Sv$. Říká nám, kolik vody proteče hadicí za určitý čas. Toto množství se v průběhu nemění, jelikož do hadice je voda vháněna pořád stejně rychle. Musí tedy platit $Q_1 = Q_2$, čili

$$S_1 v_1 = S_2 v_2\,,$$

[1] Pokud ještě nemáte mechaniku vrhů tolik osvojenou, doporučujeme si přečíst toto Výfučtení `https://vyfuk.org/_media/ulohy/r9/vyfucteni/serial3.pdf`.



Obrázek 1: Závislost vzdálenosti doletu na elevačním úhlu

z čehož lze určit poměr p rychlostí proudu po a před zúžením jako

$$p = \frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}\,.$$

Teď už stačí určit, čemu je rovno S_1 a S_2. Víme, že nejprve má konec hadice tvar kruhu, jehož obsah spočteme jako $S_1 = \pi r^2$. V druhém případě má hadice elipsovitý průřez, jehož obsah lze určit pomocí poloos elipsy a a b jako $S_2 = \pi ab$. Poměr rychlostí tak bude

$$p = \frac{\pi r^2}{\pi ab} = \frac{r^2}{ab} \doteq 1{,}4\,.$$

Voda po zúžení konce hadice stříká 1,4krát rychleji.

3. Zjistili jsme, že nová rychlost, kterou má voda po vystříknutí z hadice, je $v_2 = pv_1$. K vypočtení nové vzdálenosti dostřiku vody d_2 můžeme použít opět vzorec (1).

$$d_2 = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{(pv_1)^2 \sin 2\alpha}{g} = p^2 \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g} = p^2 d \doteq 24\,\mathrm{m}$$

Jarda po zmáčknutí hadice dosáhne proudem vody až do vzdálenosti 24 m.

Michal Stroff
`michal.stroff@vyfuk.org`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.