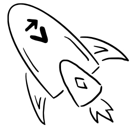
Úloha II.4 ... Až na Měsíc

7 bodů; (chybí statistiky)



Viktor si vyrobil raketu vážící $m = 70\,\mathrm{g}$ s raketovým motorem s palivem o zanedbatelné hmotnosti a impulsem tahu[1] *$I = 6\,\mathrm{N{\cdot}s}$. Po odpálení hořel raketový motor $t = 0{,}6\,\mathrm{s}$. Jak vysoko raketa vystoupala, než začala opět klesat? Předpokládejme kolmý start, zanedbatelný odpor vzduchu a konstantní průběh síly, kterou motor působí na raketu.*

Let rakety směrem vzhůru rozdělíme na dvě části podle působících sil. V první fázi, kdy hoří palivo raketového motoru, působí na raketu kromě svislé tíhové síly F_g také tahová síla motoru F_t, která má opačný směr vzhledem k F_g. Po uplynutí času $t = 0{,}6\,\mathrm{s}$ začne druhá fáze, kdy přestane motor generovat tah a bude působit jen síla F_g, která bude zpomalovat raketu, až dojde k jejímu úplnému zastavení v hledané výšce h a následnému pádu dolů. Budeme tedy chtít spočítat dráhu letu v obou fázích, výšku h pak dostaneme jako jejich součet.

Chceme-li znát výšku dosaženou v první fázi, musíme nejdříve určit zrychlení způsobené tahem motoru. K tomu využijeme druhý Newtonův zákon a impuls tahu I, z něhož snadno určíme sílu

$$F_\mathrm{t} = \frac{I}{t} \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{t} = \frac{F_\mathrm{t}}{m} = \frac{I}{mt}\,,$$

Raketa se bude pohybovat s celkovým zrychlením $a = a_\mathrm{t} - g$. Dráha uražená při daném zrychlení za čas t bude

$$h_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(a_\mathrm{t} - g\right)t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I}{mt} - g\right)t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{It}{m} - gt^2\right) \doteq 24\,\mathrm{m}\,.$$

Po spotřebování raketového paliva se již bude jednat pouze o rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_0 a zrychlením g. Abychom zjistili dráhu druhé fáze stoupání, potřebujeme znát počáteční rychlost druhé fáze. Je to rychlost, kterou dosáhla raketa za čas t se zrychlením a

$$v_0 = at = (a_\mathrm{t} - g)t = \left(\frac{I}{mt} - g\right)t = \frac{I}{m} - gt = \frac{I - gmt}{m}\,.$$

Všechnu svou kinetickou energii $E_\mathrm{k} = mv_0^2/2$ využije raketa na zvýšení své potenciální energie o $E_\mathrm{p} = mgh_2$. Z rovnosti těchto dvou energií dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(I - gmt)^2}{2gm^2} \doteq 325\,\mathrm{m}\,.$$

Výslednou výšku, do níž raketa vystoupala, dostaneme jako součet výše získaných mezivýsledků

$$h = h_1 + h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{It}{m} - gt^2\right) + \frac{(I - gmt)^2}{2gm^2} \doteq 349\,\mathrm{m}\,.$$

[1] *Impuls síly* je definován jako součin dané síly a času, po který síla působí. Tato definice však platí pouze pro sílu neměnnou s časem.

Vidíme, že Viktorem vyrobená raketa se dostala do výšky skoro 350 m. Ovšem vzhledem k tomu, že jsme zanedbali odpor vzduchu a spoustu parametrů známe poměrně nepřesně, je výška výstupu rakety zaokrouhlená na stovky metrů (tj. $h \doteq 300\,\mathrm{m}$) adekvátní odhad.

Lukáš Linhart
lukas.linhart@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.