

Úloha I.V ... Biologický experiment

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček při práci na své zahrádce našel podivného brouka a rozhodl se jej prostudovat. Položil ho proto na stůl a podíval se na něj skrz lupu tvořenou tenkou spojnou čočkou s ohniskovou vzdáleností $f = 10$ cm.

1. V jaké vzdálenosti od lupy se vytvořil obraz, jestliže se lupa nacházela ve vzdálenosti $a = 6$ cm nad broukem? Jedná se o skutečný nebo zdánlivý obraz? Výfuček namířil lupu tak, že se brouk nacházel v blízkém okolí osy čočky a zároveň byl v lupě vidět celý.
2. Jak široký byl tento obraz, pokud Výfuček změřil pravítkem, že brouk má šířku $y = 14$ mm?
3. Říká se, že pro pozorování předmětů pouhým okem je optimální vzdálenost $L = 25$ cm. Jaká je úhlová velikost brouka při takovém pozorování bez lupy? (Úhlová velikost se zde vztahuje k šířce brouka.)
4. Jaká byla úhlová velikost brouka při pozorování lupou, jestliže se Výfučkovo oko, kterým brouka pozoruje, nacházelo v ohnisku, tedy 10 cm od lupy? Porovnejte tuto úhlovou velikost s úhlovou velikostí při pozorování bez lupy v předchozí podúloze.

První podúlohu řešte výpočtem. Druhou až čtvrtou můžete řešit početně nebo graficky.

Nápověda: Mohou vám pomoci obrázky ve Výfučení.

1. Pro výpočet použijeme zobrazovací rovnici z Výfučení ve tvaru

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

kde f značí ohniskovou vzdálenost lupy, a vzdálenost brouka od lupy a a' vzdálenost obrazu brouka od lupy. Z této rovnice si vyjádříme veličinu a' .

$$a' = \frac{af}{a - f}$$

Teď už nám jen stačí dosadit hodnoty $a = 6$ cm a $f = 10$ cm ze zadání.

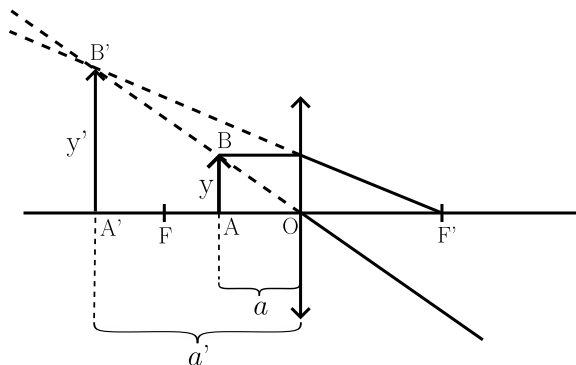
$$a' = \frac{6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{6 \text{ cm} - 10 \text{ cm}} = -15 \text{ cm}$$

Obraz je ve vzdálenosti 15 cm před lupou. Díky zápornému znaménku víme, že se jedná o obraz zdánlivý.

2. K určení šířky obrazu budeme potřebovat vypočítat zvětšení lupy Z , odvodíme si proto vzorec na jeho výpočet.

Na obrázku 1 je znázorněně zobrazení brouka lupou. Z obrázku je zřejmé, že trojúhelníky OAB a $OA'B'$ jsou podobné, tj. mají stejný tvar a liší se pouze svými velikostmi. Konkrétně velikost trojúhelníku, jehož stranou $A'B'$ je obraz předmětu (brouka), je Z -násobkem velikosti trojúhelníku, jehož stranou AB je předmět (brouk).

Pro podobné trojúhelníky platí, že poměr libovolné odpovídající dvojice stran je v obou trojúhelnících stejný. Pro řešení této podúlohy se budeme zajímat o poměr stran, které



Obrázek 1: Znázornění zobrazení předmětu tenkou spojnou čočkou

tvorí šířka předmětu, resp. jeho obrazu a vzdálenost předmětu, resp. jeho obrazu od čočky. Můžeme tedy psát

$$\frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|OA'|}.$$

Když si velikost strany AB , resp. $A'B'$ označíme y , resp. y' a strany OA , resp. OA' jako a , resp. a' , získáme následující rovnici, ze které již jednoduše vyjádříme velikost obrazu předmětu (brouka) y' .

$$\frac{y}{a} = \frac{y'}{a'} \Rightarrow y' = y \frac{a'}{a}$$

Abychom dodrželi znaménkovou konvenci používanou ve Výfučtení, musíme na pravou stranu rovnice přidat znaménko minus!¹

Výsledné vztahy pro zvětšení Z tenké čočky a velikost obrazu y' tedy budou následovné:

$$Z = -\frac{a'}{a},$$

$$y' = -y \frac{a'}{a}.$$

Nyní jen dosadíme hodnoty ze zadání $a = 6 \text{ cm}$, $y = 14 \text{ mm}$ a hodnotu $a' = -15 \text{ cm}$ vypočítanou v předchozí podúloze.

$$y' = -14 \text{ mm} \cdot \frac{-15 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = 35 \text{ mm}$$

Obraz brouka je široký 35 mm.

¹K odůvodnění tohoto kroku nám stačí rychlá úvaha. Chceme, aby kladné zvětšení znamenalo přímý obraz a záporné zvětšení obraz převrácený. Podívejme se na případ z obrázku 1, kde máme „zápornou“ vzdálenost a' a zároveň nám vznikne přímý obraz. Potřebujeme tedy kladnou hodnotu zvětšení Z . Jelikož je hodnota vzdálenosti a kladná, musíme přidat znaménko minus, abychom se zápornou hodnotou a' získali kladný výsledek. Stejnou úvahu lze provést i pro případ, kdy vznikne skutečný převrácený obraz na pravé straně čočky tj. a' je kladné, ale Z musí být záporné.

3. Úhlovou velikost předmětu δ lze přibližně² vypočítat jako podíl šířky předmětu d a vzdálenosti L , ze které se na předmět díváme.

$$\delta = \frac{d}{L}$$

Dosažením číselných hodnot obou veličin získáme úhlovou velikost předmětu v radiánech.³

Stačí nám tedy do vztahu jen dosadit šířku brouka $y = 14 \text{ mm} = 1,4 \text{ cm}$ a délku $L = 25 \text{ cm}$.

$$\delta = \frac{1,4 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} \text{ rad} = 0,056 \text{ rad} \doteq 3,2^\circ$$

4. K výpočtu úhlové velikosti brouka při pozorování lupou použijeme stejný vztah jako v předchozí podúloze. Tentokrát však za šířku předmětu d dosadíme velikost obrazu brouka $y' = 35 \text{ mm} = 3,5 \text{ cm}$ a za vzdálenost L , ze které předmět pozorujeme, dosadíme součet vzdálenosti oka od čočky $f = 10 \text{ cm}$ a velikosti vzdálenosti obrazu od čočky $|a'| = 15 \text{ cm}$.

$$\delta' = \frac{y'}{|a'| + f} = \frac{3,5 \text{ cm}}{15 \text{ cm} + 10 \text{ cm}} \text{ rad} = 0,14 \text{ rad} \doteq 8,0^\circ$$

Úhlová velikost brouka při pozorování lupou byla tedy přibližně 2,5krát větší než při pozorování bez lupy.

Vojtěch Kubrycht
kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²Pro přesný výpočet by bylo třeba využít inverzní goniometrické (cyklometrické) funkce, ale zmíněná aproximace je dostatečně přesná, pokud platí, že šířka předmětu je mnohem menší než vzdálenost, ze které ho pozorujeme tj. $d \ll L$.

³Radián je jednotka úhlu, k přepočtu na stupně lze použít vztah $1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi$. Více se o radiánech se můžete dočíst např. zde <https://cs.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n>.