Úloha VI.5 ... Basketbalová

8 bodů; (chybí statistiky)

Kája si o tělocviku hrála s míčem. Všimla si, že při driblování v různých výškách musí do míče bouchat v jiných časových intervalech.

1. *S jakou frekvencí musí driblovat, tj. jak často musí do míče bouchnout, pokud dribluje ve výšce $h = 1\,\mathrm{m}$, což je maximální výška, do které míč vyskočí? Uvažujte, že se míč odráží od země bez ztráty energie a že v tomto případě Kája při driblování neuděluje míči žádnou rychlost.*
2. *Kája si všimla, že míč po odrazu vyletí pouze do výšky $0{,}8\,\mathrm{m}$. Jakou mu Kája musí udělit počáteční rychlost, aby vyletěl zpět do výšky h?*
3. *S jakou frekvencí musí nyní, tj. v situaci v podúloze 2, driblovat?*

1. Kája pustí míč z výšky $h = 1\,\mathrm{m}$. Ten následně pokračuje volným pádem, pro nějž platí

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2\,,$$

kde $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení a t_1 čas, za který míč dopadne na zem. Po odrazu se bude míč vracet úplně stejně zpátky, protože neztratil žádnou energii. Jinými slovy míč bude mít po odrazu stejnou rychlost jako před odrazem, ale opačný směr pohybu, takže doputuje zpět do rukou Káji za stejný čas t_1.

Míč od puštění zpět ke Káje doletí za

$$T_1 = 2t_1 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0{,}90\,\mathrm{s}\,.$$

Odpovídající frekvence driblování tedy je

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{8h}} = 1{,}1\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

2. Jestliže míč energii ztratí, potřebuje mu Kája dodat počáteční rychlost takovou, aby jeho počáteční kinetická energie vyrovnala ztráty, a on se tak po odrazu pohyboval stejně jako v předchozím případě. To, že míč po pouhém puštění vyletí po odrazu do výšky $0{,}8\,\mathrm{m}$, znamená, že ztratil $20\,\%$ své energie, protože potenciální energie je přímo úměrná výšce nad podlahou a výška míče na konci je právě o $20\,\%$ nižší než na začátku.

Z tohoto můžeme vyvodit závěr, že míč při každém dopadu na podlahu ztrácí $20\,\%$ své energie. Tuto ztrátu musíme kompenzovat počáteční rychlostí míče směrem k zemi, tedy jeho kinetickou energií. Nesmíme ovšem zapomenout, že i část kinetické energie se při nárazu ztratí – tu musíme také nahradit. Jednoduše to vyjádříme v následujícím odstavci.

Na začátku má míč potenciální energii $E_\mathrm{p} = mgh$ a kinetickou energii $E_\mathrm{k} = mv_0^2/2$, kde m je hmotnost míče a v_0 je rychlost, kterou mu Kája musí na začátku udělit. Aby po odrazu vyletěl zpět do výšky h, musí být jeho kinetická energie těsně po odrazu rovna potenciální na konci jeho stoupání, tedy mgh. Jestliže označíme celkovou počáteční energii jako $E_0 = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}$, pak při ztrátě 20 % (jedné pětiny) energie platí

$$E_0 - \frac{1}{5}E_0 = mgh\,,$$
$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh\right) = mgh\,,$$

což po jednoduché úpravě a pokrácení hmotnosti vede na počáteční rychlost

$$v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 2{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3. Při pohybu s nenulovou počáteční rychlostí získáme rozšířením pohybové rovnice z první podúlohy kvadratickou rovnici

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\,,$$

která má kladné řešení

$$t_2 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0}{g} = \sqrt{\frac{h}{2g}}\left(\sqrt{5} - 1\right),$$

kam jsme dosadili dříve odvozený vztah $v_0 = \sqrt{gh/2}$.

Přičtením $t_1 = \sqrt{2h/g}$ (míč doletí zpět do výšky h, jeho pohyb tedy trvá stejně dlouho jako v bodě 1) dostaneme konečný výsledek

$$T_2 = t_2 + t_1 = \sqrt{\frac{h}{2g}}\left(\sqrt{5} - 1\right) + \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{2g}}\left(\sqrt{5} + 1\right) \doteq 0{,}73\,\mathrm{s}\,,$$

odkud frekvenci vypočítáme jednoduše jako

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5} - 1}\sqrt{\frac{2g}{h}} \doteq 1{,}4\,\mathrm{s^{-1}}\,.$$

Kája tedy musí do míče bouchnout přibližně 1,4krát za sekundu, což je více než v předchozím případě, protože zde míč padá dolů rychleji.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.