Výfučtení: Gravitace a kosmické rychlosti

V každodenním životě se střetáváme hlavně se dvěma silami – gravitační, která drží nás a vše okolo na zemi, a elektromagnetickou, která drží atomy a molekuly pohromadě, umožňuje vznik světla, rádiových vln atd. V tomto Výfučtení se zaměříme na sílu gravitační, její potenciální energii a na to, jak uniknout z jejího působení.

Gravitační pole

Ve fyzice při výpočtech často pracujeme se dvěma různými pohledy na gravitační pole: homogenním a radiálním. Pojďme se nyní podívat na to, jak je možné, že gravitace je popsána dvěma tak různými modely, a jak můžeme gravitační pole v každém z těchto modelů popsat.

Radiální gravitační pole popisuje gravitační působení v obecném případě. Jedná se o teorii, která dobře popisuje gravitaci ve všech běžných podmínkách – od utváření galaxií až po padání jablek na Zemi. Oproti tomu homogenní gravitační pole popisuje gravitaci pouze přibližně v blízkosti zemského povrchu. Jeho výhoda však spočívá v tom, že jeho matematický popis je mnohem jednodušší. V situacích, s nimiž se každodenně setkáváme, nám dává téměř totožné výsledky jako správnější popis pomocí radiálního pole.

Radiální gravitační pole

Jak jsme nastínili výše, radiální pole používáme ve chvíli, kdy se již nenacházíme na povrchu Země (nebo jiného kosmického tělesa) a nemůžeme využít zjednodušení v podobě homogenního pole. Často ho tedy potkáme například při výpočtech pohybu planet kolem Slunce, Měsíce kolem Země nebo pohybu raket a sond, které letí zkoumat planety Sluneční soustavy. Velikost gravitační síly mezi dvěma hmotnými tělesy je dána *Newtonovým gravitačním zákonem*

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{r^2}\,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 {\cdot} kg^{-1} {\cdot} s^{-2}}$ je tzv. gravitační konstanta, m, M jsou hmotnosti těles a r je jejich vzájemná vzdálenost.

Tělesa tedy kolem sebe vytváří tzv. gravitační pole udávající, jak na sebe tělesa gravitačně působí. Toto pole se nejsnáze popisuje pomocí gravitační potenciální energie, která vyjadřuje, jakou energii má jiné těleso, když se v tomto poli nachází

$$E_\mathrm{g} = -G\frac{mM}{r}\,.$$

Při porovnání tohoto vzorce s Newtonovým gravitačním zákonem vidíme rozdíl hlavně ve znaménku a mocnině u vzdálenosti r. Záporné znaménko u potenciální energie souvisí s faktem, že působící síla se vždy snaží snižovat potenciální energii tělesa. Když se vzdálenost mezi tělesy sníží, tak bude díky zápornému znaménku energie více záporná, tedy se též sníží. Gravitační síla se evidentně snaží zmenšovat vzdálenost mezi tělesy – je přitažlivá. Záporné znaménko potřebujeme proto, aby vzorec pro energii tomuto známému faktu odpovídal. (Bez něj by odpovídající síla musela být odpudivá, takže by to tedy nemohla být potenciální energie pro gravitaci.)

Homogenní gravitační pole

Když se nacházíme na povrchu Země, není praktické využívat vzorec výše, jelikož je dosti obtížné s ním počítat. Většinou jsou však rozdíly ve vzdálenostech zanedbatelné vůči poloměru Země $R_\oplus = 6\,371\,\mathrm{km}$. Díky tomu můžeme určit přibližný vzorec pro energii v blízkosti zemského povrchu. Pokud se pohybujeme ve výškách nad povrchem h (kde h je mnohem menší než $R_\oplus$), můžeme vzorec upravit následujícím způsobem:

$$E_\mathrm{g} = -G\frac{mM_\oplus}{h + R_\oplus} = -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus}\frac{1}{1 + h/R_\oplus} \approx -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus}\left(1 - \frac{h}{R_\oplus}\right) = -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}mh\,.$$

Při úpravách jsme původní nepřímou úměru mezi potenciální energií a vzdáleností od středu Země r v blízkosti jejího povrchu aproximovali lineární závislostí. Vidíme, že první člen ve výsledku nezávisí na h, a tudíž se vždy při výpočtu změny potenciální energie odečte. U druhého členu označujeme členy ve zlomku jako gravitační zrychlení na Zemi, jejíž hmotnost je $M_\oplus = 5{,}973\,6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$,

$$a_\mathrm{g} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 9{,}823\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Nesmíme však zapomenout, že kromě gravitační síly působí na povrchu Země kvůli její rotaci i síla odstředivá. Ta závisí na naší zeměpisné šířce – na pólech je nulová, největší je na rovníku. Střední hodnotu gravitačního zrychlení se započítáním odstředivé síly nazýváme tíhové zrychlení a její dohodnutá hodnota činí

$$g = 9{,}807\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Potenciální energie potom nabývá známého tvaru

$$E_\mathrm{p} = mgh$$

a související tíhová síla musí mít tvar ($E_\mathrm{p} = F_\mathrm{G}h$)

$$F_\mathrm{G} = mg\,.$$

Kosmické rychlosti

Potenciální energii radiálního pole můžeme použít k výpočtu tzv. kosmických rychlostí, které popisují různé významné situace spojené s pohyby ve Sluneční soustavě.

1. kosmická rychlost

První kosmická rychlost v_1 je definována jako rychlost potřebná k tomu, abychom se pohybovali kolem Země po kruhové trajektorii o poloměru $R_\oplus$. Víme, že při pohybu po kružnici gravitační síla vyváží odstředivou sílu. Odtud vyjádříme rychlost v_1 jako

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g}\,,$$

$$m\frac{v_1^2}{R_\oplus} = G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2}\,,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}\,.$$

Dosazením číselných hodnot získáme výsledek $v_1 \doteq 7{,}905\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

2. kosmická rychlost

2. kosmická rychlost v_2 je rychlost potřebná k úniku z gravitačního působení Země. Jinými slovy se musí dostat od Země tak daleko, aby její gravitační působení již bylo zanedbatelné. K výpočtu využijeme zákon zachování mechanické energie. Na počátku je těleso na povrchu Země, tj. ve vzdálenosti $R_\oplus$ a má rychlost v_2. Celková energie tedy je

$$E_{\text{počáteční}} = E_\text{k} + E_\text{p} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus}\,.$$

Jako konec manévru budeme považovat vzdálenost o mnoho větší než původní poloměr Země (formálně řečeno, že budeme v nekonečnu). Uvažujme, že v této velké vzdálenosti se těleso zastaví – a my mu tedy potřebujeme dodat přesně tolik energie, aby se nevrátilo a zároveň žádná nepřebývala. To znamená, že kinetická energie je zde nulová. Obdobně pro potenciální energii bude zlomek též nulový, neboť dělíme velmi velkým (nekonečně velkým) číslem. Konečná energie má velikost

$$E_{\text{konečná}} = 0\,.$$

Z rovnosti energií určíme 2. kosmickou rychlost

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} = 0\,,$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2M_\oplus G}{R_\oplus}}\,,$$

po dosazení získáme $v_2 = 11{,}19\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Můžeme si povšimnout, že 2. kosmická rychlost se liší od 1. kosmické rychlosti o násobek $\sqrt{2}$. Výsledná kosmická rychlost je velmi vysoká v porovnání s rychlostmi, které v běžném životě potkáváme. Proto jsou pro cesty raket do vesmíru potřeba velmi velké palivové nádrže a obrovské množství energie.

3. kosmická rychlost

Pro 3. kosmickou rychlost platí stejný vztah jako pro druhou, jenom namísto vlivu Země uvažujeme vliv Slunce. Rychlost nutná k opuštění gravitačního vlivu Slunce je rovna

$$v_3 = 42{,}48\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Rakety, které mají uniknout gravitaci Slunce, startují ze Země. Sama Země se pohybuje kolem Slunce svojí vlastní 1. kosmickou rychlostí

$$v_{1\oplus} = \frac{v_3}{\sqrt{2}} = 30{,}04\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

K překonání gravitačního působení Slunce ve výsledku musíme raketě startující z oběžné dráhy Země dodat pouze rychlost $\Delta v = v_3 - v_{1\oplus} = 12{,}44\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Tuto rychlost Δv musí mít raketa až poté, co unikne gravitaci Země. Nás však především zajímá počáteční rychlost, kterou musí mít při startu z povrchu planety. Využijeme k tomu podobné úvahy o energii jako při výpočtu

2. kosmické rychlosti s tím rozdílem, že konečná kinetická energie po úniku působení Země musí být rovna $E'_{\text{konečná}} = m\Delta v^2/2$. Odtud dostaneme

$$
\begin{aligned}
E_{\text{počáteční}} &= E'_{\text{konečná}}\,,\\
\frac{1}{2}mv_3'^2 - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} &= \frac{1}{2}m\Delta v^2\,,\\
v_3' &= \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus} + \Delta v^2}\,.
\end{aligned}
$$

K opuštění Sluneční soustavy při startu ze Země bychom tedy potřebovali rychlost $v_3' = 16{,}73\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Na závěr však musíme ještě dodat, že vypočítané kosmické rychlosti se samozřejmě liší od skutečných rychlostí raket. Například na raketu startující z povrchu Země působí velký odpor vzduchu, proto jí musíme dodat mnohem více energie.

Při opouštění Sluneční soustavy existuje chytřejší a výhodnější postup, než prosté dodání veškeré energie raketě ihned na začátku. K úniku totiž lze využít gravitace ostatních planet. Takovýto manévr se nazývá gravitační prak a v praxi se používá při posílání sond do vzdálenějších koutů Sluneční soustavy.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Hedvika Kršková
hedvi@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.