Úloha V.E ... Tuhost propisky

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček si hrál s propiskou a objevil v ní malou pružinku. Zamyslel se, jaké jsou asi její vlastnosti. Pomozte mu a libovolným způsobem změřte tuhost pružinky v obyčejné propisce.

Úvod

Před samotným měřením bychom si měli ujasnit, co je to vlastně tuhost. Jedná se o fyzikální veličinu, která charakterizuje každé pružné těleso. Popisuje, jak moc se natáhne vzhledem k velikosti působící síly. V praxi je tuhost důvodem, proč se například každá pružina natáhne jinak, i když je na nich zavěšené stejné závaží. Samotná tuhost nezávisí pouze na materiálu, z něhož je pružina tvořená, ale i na samotné konstrukci pružiny – např. počtu a hustotě závitů. Jednotkou tuhosti je $\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a většinou ji značíme k. Měření můžeme provádět několika způsoby – zde se zaměříme na metodu statickou a dynamickou.

Statická metoda

Měření touto metodou je poměrně snadné. Našim cílem je zjistit, o kolik se pružina prodlouží, když na ni budeme působit určitou silou. Vezmeme si tedy obyčejnou pružinku a pomocí posuvného měřítka změříme její počáteční délku l_0, následně na ni zavěsíme námi zvolené závaží o hmotnosti m a změříme výslednou délku l. Odečtením těchto dvou délek získáme samotné prodloužení pružiny $\Delta l = l - l_0$. Na závaží působí síla pružnosti F_p a opačným směrem působí tíhová síla $F_\mathrm{G} = mg$, kde $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení. Tyto hodnoty následně dosadíme do vzorce pro výpočet tuhosti k.

$$k = \frac{F_\mathrm{p}}{\Delta l} = \frac{mg}{\Delta l}$$

Dodejme ještě, že když zavěsíme pružinku bez závaží, tak se nepatrně prodlouží v důsledku vlastní tíhy. Toto prodloužení je pro pružinku v propisce velmi malé, proto tento efekt zanedbáváme.

Měření

Měření jsme provedli pětkrát – pokaždé se stejnou pružinou, ale jiným závažím. Změřené délky pružinek jsme vždy zaokrouhlili na desetiny milimetru. Posuvné měřidlo sice umožňuje měřit o něco přesněji, ovšem vzhledem ke tvaru pružinky a k tomu, že při samotném měření vždy pružinku trochu deformujeme, je přesnost změření délky jistě menší než přesnost měřidla (dalo by se diskutovat i o tom, jestli námi odhadnutá chyba 0,1 mm stále není moc malá).

n	$\frac{m}{\mathrm{kg}}$	$\frac{l_0}{\mathrm{mm}}$	$\frac{l}{\mathrm{mm}}$	$\frac{\Delta l}{\mathrm{mm}}$	$\frac{F}{\mathrm{N}}$	$\frac{k}{\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}$
1	0,10	28,9	31,4	2,5	0,98	390
2	0,25	29,1	34,7	5,6	2,45	440
3	0,40	28,2	37,9	9,7	3,92	400
4	0,50	28,8	40,8	12,0	4,91	410
5	0,75	28,7	45,9	17,2	7,36	430

Tab. 1: Data naměřená statickou metodou

Z měření je patrné, že tuhost vychází ve všech případech podobně. Po vypočítání průměru jsme zjistili, že tuhost pružiny kancelářské propisky je $k_{\mathrm{stat}} = 410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. U posledního měření (s největším závažím) se pružina plasticky zdeformovala (již se nevrátila do původní polohy). Dodejme, že vypočítanou tuhost zaokrouhlujeme na 2 platné číslice, protože hmotnost závaží i změnu délky pružinky známe s přesností přibližně na 2 platné číslice.

Dynamická metoda

Na rozdíl od statické metody, kdy pružina se závažím byla v klidu, se v dynamické metodě zaměříme na kmitavý pohyb. Ze začátku se pružina nachází v rovnovážné poloze – tedy stejně jako při statické metodě je na pružině zavěšeno závaží a celá soustava je v klidu a opět platí, že síla pružnosti F_{p} se rovná tíhové síle F_{G}. Následně uvedeme závaží do kmitavého pohybu – vychýlíme ho z rovnovážné polohy.

Nyní nastává zajímavý jev – pohyb již není závislý na tíhovém zrychlení. Kmitavý pohyb pružinky bychom tedy pozorovali i například na Mezinárodní vesmírné stanici, kde je stav beztíže. Plyne to mimo jiné z rovnic pro síly. Intuitivně si to lze představit tak, že když se pružinka prodlouží do rovnovážné polohy, vyrovná tím gravitaci a jelikož je síla pružinky lineární vzhledem k původní výchylce, tak je lineární i vzhledem k nové.

Pomocí pokročilé matematiky se dá následně ukázat, že perioda T kmitů pružinky je rovna (nebo lze prostě opsat vzoreček z Wikipedie[1])

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,$$

odkud vyjádříme tuhost jako

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}\,.$$

Měření

Měření jsme prováděli pomocí detektoru Vernier Go! Motion, který funguje jako sonar. Přístroj nejdříve vyšle zvukovou vlnu, která se v určité vzdálenosti nad přístrojem odrazí a vrátí se zpět do detektoru. Z rychlosti zvuku následně Vernier určí uraženou vzdálenost.

Na pružinu jsme upevnili závaží o hmotnosti 0,5 kg a pružinu rozkmitali. Ve sběrači dat jsme následně viděli pozici závaží v čase. Odečetli jsme čas 20 kmitů pružiny, který byl $T_{20} = 4{,}55\,\mathrm{s}$. Doba jedné periody tedy byla $T = T_{20}/20 = 0{,}228\,\mathrm{s}$, což vede na tuhost pružiny

$$k_{\mathrm{dyn}} = 380\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}\,.$$

Diskuze a závěr

Pomocí dvou metod jsme určili tuhost pružiny z propisky jako $k_{\mathrm{dyn}} = 380\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$a $k_{\mathrm{stat}} = 410\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Relativní rozdíl mezi hodnotami je přibližně 5 %. U obou metod jsme se mohli dopustit několika nepřesností. U statické metody docházelo alespoň u vyšších hmotností k plastické deformaci, tedy i změně mechanických vlastností pružiny. Také jsme však mohli chybně

[1] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Pružina`

odečítat z měřidel. U dynamické metody nebyl pohyb pružiny dokonale harmonický; např. závaží se kymácelo ze strany na stranu, což způsobilo i z části neharmonický graf pohybu v čase. Odečítáním časů z počítače jsme se alespoň vyhnuli chybě v podobě lidského reakčního času.

Hedvika Kršková
hedvi@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.