Úloha V.4 ... Nekonstantní

6 bodů; (chybí statistiky)

Pro vyšší změny teplot přestává být měrná tepelná kapacita některých materiálů nezávislá na teplotě a začne se řídit přibližně lineární závislostí. Uvažujme kov s hodnotou měrné tepelné kapacity $520\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ *za teploty* $0\,^\circ\mathrm{C}$ *a* $570\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ *za teploty* $100\,^\circ\mathrm{C}$. *Předpokládejte, že mezi oběma teplotami se měrná tepelná kapacita zvyšuje lineárně. Kolik tepla musíme dodat kusu tohoto kovu o hmotnosti* $50\,\mathrm{g}$, *chceme-li ho ohřát z teploty* $0\,^\circ\mathrm{C}$ *na teplotu* $50\,^\circ\mathrm{C}$*?*

Měrná tepelná kapacita

Nejprve by bylo dobré vyjádřit si závislost měrné tepelné kapacity c na teplotě T za použití údajů ze zadání. Víme, že měrná tepelná kapacita je na teplotě lineárně závislá, tzn. bude se řídit vztahem

$$c = a + bT\,,$$

kde a a b jsou neznámé konstanty, které si vyjádříme pomocí údajů ze zadání. Víme, že při teplotě $T = 0\,^\circ\mathrm{C}$ bude měrná tepelná kapacita[1] daného kovu $c_0 = 520\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$. Pomocí těchto údajů jsme schopni určit koeficient a tak, že údaje dosadíme do výše uvedeného vztahu a vyjádříme z něj a jako neznámou[2]:

$$a + b \cdot 0 = 520 \quad \Rightarrow \quad a = 520\,.$$

Koeficient b určíme stejnou metodou podle druhé zadané dvojice hodnot teploty a měrné tepelné kapacity $T = 100\,^\circ\mathrm{C}$, $c_{100} = 570\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$.

$$520 + b \cdot 100 = 570 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}5$$

Pro závislost měrné tepelné kapacity na teplotě tedy dostáváme následující předpis:

$$c = 520 + 0{,}5T\,.$$

Teplo

Množství tepla, které musíme kusu daného kovu o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{g}$ dodat, vypočítáme pomocí následujícího vztahu

$$Q = mc\Delta T\,,$$

kde $\Delta T = 50\,^\circ\mathrm{C}$ je změna teploty kusu kovu. Problematické ovšem je, že zde měrná tepelná kapacita c závisí na teplotě, a tak nelze správný výsledek získat pouhým násobením.

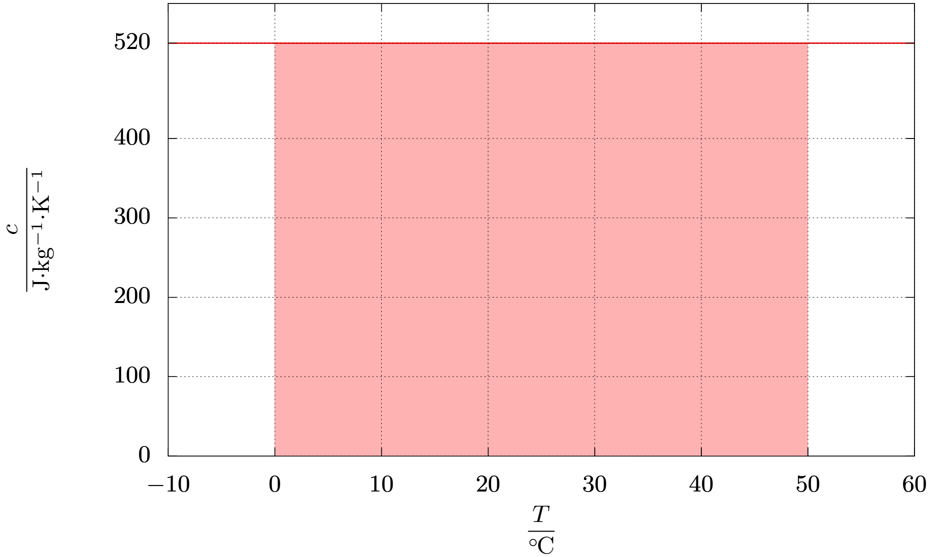
Zkusme si znázornit problém graficky. Kdyby byla měrná tepelná kapacita našeho kusu kovu konstantní (neměnila by se s teplotou), měla by stále hodnotu $c_0 = 520\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ a jejím grafem by byla přímka rovnoběžná s osou teploty jako na obrázku 1.

Obsah plochy pod touto přímkou mezi hodnotami teploty $T_1 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ a $T_2 = 50\,^\circ\mathrm{C}$ by odpovídal obsahu obdélníku o rozměrech c_0 a ΔT.

$$S_0 = c_0\,(T_2 - T_1) = 26\,000\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}}$$

[1]Měrná tepelná kapacita se většinou udává s jednotkou $\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, ale lze používat i jednotku $\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$. V definičním vztahu měrné tepelné kapacity vystupuje rozdíl teploty a jelikož je Kelvinova teplotní stupnice „pouze“ posunutá oproti Celsiově teplotní stupnici, toto posunutí se při výpočtu rozdílu teplot odečte, takže ve výsledku jsou obě jednotky ekvivalentní.

[2]Vždy zde počítáme v základních jednotkách, a tak je v této části pro přehlednost nepíšeme.



Obr. 1: Graf konstantní měrné tepelné kapacity

Teplo, které bychom kusu kovu museli dodat, by odpovídalo vynásobení obsahu S_0 a jeho hmotnosti $m = 50\,\mathrm{g} = 0{,}05\,\mathrm{kg}$.

$$Q_0 = mS_0 = 1\,300\,\mathrm{J}$$

Vraťme se k situaci, kde se měrná tepelná kapacita mění s teplotou. Stále platí, že tělesu musíme dodat teplo, jehož velikost je úměrná ploše pod grafem závislosti měrné tepelné kapacity c na teplotě T. (Odůvodnění tohoto faktu je naznačeno v poznámce na konci tohoto vzorového řešení.) Grafem by stále byla přímka, která ale tentokrát nebude rovnoběžná s osou teploty. Když porovnáme grafy 1 a 2 zjistíme, že obsah pod přímkou je skoro stejný až na trojúhelník, který „přebývá“ na grafu 2. To znamená, že nám stačí vypočítat obsah tohoto trojúhelníku, přičíst ho k obsahu S_0 obdélníku pod ním a výsledný obsah vynásobit hmotností kusu kovu $m = 0{,}05\,\mathrm{kg}$. Získáme tak teplo Q, které musíme kusu kovu dodat, abychom ho ohřáli z teploty $T_1 = 0\,°\mathrm{C}$ na teplotu $T_2 = 50\,°\mathrm{C}$. Obsah trojúhelníku vypočítáme pomocí vzorce

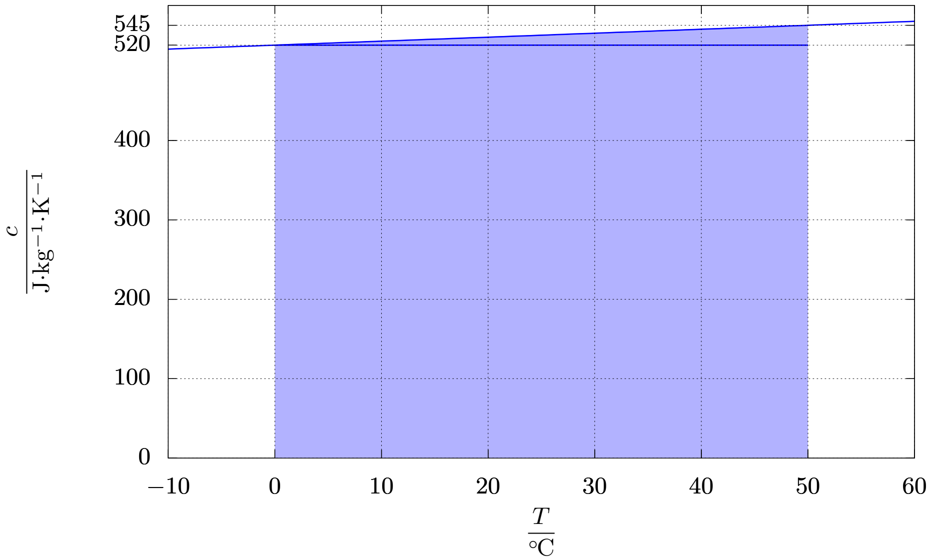
$$S_\mathrm{t} = \frac{\Delta c \Delta T}{2} = \frac{(c_{50} - c_0)\,(T_2 - T_1)}{2}\,,$$

kde c_{50} značí měrnou tepelnou kapacitu kovu za teploty $50\,°\mathrm{C}$. Tu spočteme dosazením této teploty výše do předpisu měrné tepelné kapacity.

$$S_\mathrm{t} = 625\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}\,.$$

Celkový obsah pod přímkou tedy bude

$$S = S_0 + S_\mathrm{t} = 26\,625\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$$



Obr. 2: Graf měrné tepelné kapacity lineárně závislé na teplotě

Teď už jen tento obsah vynásobíme hmotností kusu kovu a získáme hledané množství tepla.

$$Q = mS = 1\,331{,}25\,\mathrm{J}$$

Poznámka o výpočtu pomocí plochy pod grafem funkce

Použitý výpočet plyne z myšlenky, že si celé ohřívání rozdělíme na velký počet ohřívání po malých kouscích (tj. třeba 50 ohřátí o 1 °C) a u všech vypočítáme, kolik přibližně tepla na ohřátí potřebujeme. Pro první bychom tedy měli $Q_1 = mc_0 \cdot 1\,°\mathrm{C}$, pro druhé $Q_2 = mc_1 \cdot 1\,°\mathrm{C}$ atd. Výsledek po sečtení odpovídá tomu, kdybychom plochu pod grafem vyplnili tenkými obdélníčky, které se vždy levým horním rohem dotýkají grafu. (Plochu zde ovšem poté opět musíme vynásobit hmotností m.)

Musíme si ovšem uvědomit, že takovýto výpočet není úplně přesný, jelikož jsme zanedbali to, že i při ohřátí třeba jen o jeden stupeň se trochu změní měrná tepelná kapacita. Tuto chybu však můžeme zmenšit tím, že si výpočet rozdělíme na ještě více ohřívání po ještě menších kouscích. Obdélníčky tedy budou ještě tenčí a bude jich více, což vede k tomu, že plocha obdélníčků bude nyní lépe odpovídat ploše pod grafem funkce.

Nyní už stačí, když si uvědomíme, že přesný výsledek pro teplo bychom teoreticky získali, pokud bychom si výpočet rozdělili na „nekonečně“ mnoho „nekonečně“ malých ohřátí. To je samozřejmě z praktického hlediska nemožné, jelikož bychom poté úlohy počítali nekonečně dlouho. Součet ploch „nekonečně“ mnoha „nekonečně“ malých obdélníčků je ale již „přesně“ rovna ploše pod grafem funkce. Tímto jsme tedy došli k závěru, který jsme použili k výpočtu. Je důležité zmínit, že tato metoda výpočtu pomocí plochy pod grafem funkce je v pokročilejší fyzice velmi užitečná. Analogická úloha k výše vyřešené je totiž třeba úloha výpočtu dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu. Pokud zvládneme určit plochy pod grafy složitějších funkcí, můžeme snadno počítat i dráhy složitějších pohybů.

Vojtěch Kubrycht
`kubrycht@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.