výfuk

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

do rukou se vám dostává pátá brožurka letošního ročníku Výfuku. Najdete v ní zadání další série, ve které se můžete těšit na úlohy o mravencích nebo destruktivních medicinbalech. Čeká na vás také na páté Výfučtení věnované gravitaci. Naleznete zde i vzorová řešení 4. série a průběžné pořadí po ní.

Proběhlo přihlašování na letní tábor. Volná místa byla zaplněna v rekordním čase. Pokud se na vás nedostalo, nezoufejte! Od 4. do 7. dubna proběhne v Litoměřicích jarní setkání, na které již brzy spustíme registraci.

Dále ještě připomínáme, že i tento ročník má Výfučí bingo, kde můžete plněním úkolů souvisejících s řešením Výfuku získat různé ceny, tak nám pošlete své vyplněné tabulky.

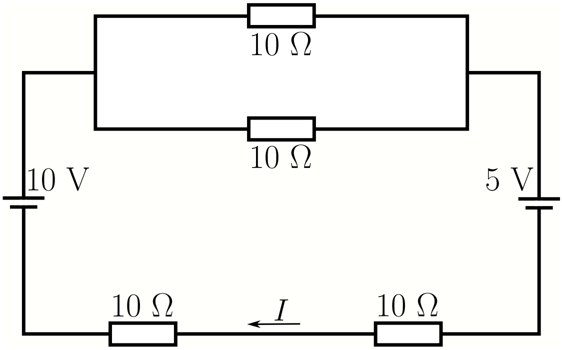
Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org

Zadání V. série

Termín odeslání: 8. 4. 2024 20.00

Úloha V.1 ... Dva zdroje ❻ ❼ — 5 bodů

Výfuček si jen tak pro zábavu zapojoval různé obvody a měřil procházející proud. Sestavil obvod se dvěma zdroji, jehož schéma je na obrázku níže, a změřil proud I. Potom si uvědomil, že takový obvod je zbytečně složitý a že může snadno oba zdroje nahradit jediným, aniž by se procházející proud změnil. Nakreslete takový obvod, v němž bude jediný zdroj, a vypočtěte procházející proud I.



Obr. 1: Schéma Výfučkova zapojení

Úloha V.2 ... Mravenec na trubce ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Mravenec šplhal po vnější straně trubky. Lezl rovnoměrně po šroubovici a za čas $t = 20\,\mathrm{s}$, kdy ulezl přesně jednu otočku šroubovice, se dostal do výšky $h = 15\,\mathrm{cm}$ přesně nad místem, ze kterého začal lézt. Spočítejte průměrnou rychlost mravence, jestliže trubka měla průměr $d = 12\,\mathrm{cm}$. Změní se průměrná rychlost, pokud mravenec na stejné vertikální vzdálenosti za stejný čas stihne vylézt dvě otočky šroubovice?

Úloha V.3 ... Destruktivní medicinbal ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Martinovi se jednoho dne podařilo vyhodit medicinbal o hmotnosti 5 kg až ke stropu tělocvičny. Záhy si však uvědomil následky svého činu a pokusil se ho tedy zpomalit, aby zamezil hlučnému dopadu na podlahu. Předpokládejte, že Martin zachytí medicinbal ve výšce 2,3 m nad podlahou a následně jej konstantní silou zpomaluje, dokud se zcela nezastaví těsně nad zemí. Jakou silou musí Martin při zpomalování působit na medicinbal? Výška tělocvičny je 10 m. Rozměry medicinbalu zanedbejte.

Úloha V.4 ... Nekonstantní ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Pro vyšší změny teplot přestává být měrná tepelná kapacita některých materiálů nezávislá na teplotě a začne se řídit přibližně lineární závislostí. Uvažujme kov s hodnotou měrné tepelné kapacity $520\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ za teploty $0\,{}^\circ\mathrm{C}$ a $570\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}{}^\circ C^{-1}}$ za teploty $100\,{}^\circ\mathrm{C}$. Předpokládejte, že mezi oběma teplotami se měrná tepelná kapacita zvyšuje lineárně. Kolik tepla musíme dodat kusu tohoto kovu o hmotnosti 50 g, chceme-li ho ohřát z teploty $0\,{}^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $50\,{}^\circ\mathrm{C}$?

Úloha V.5 ... Stříkající vodoměr ❻ ❼ ❽ ❾ ★ 7 bodů

Filip rád ve sprše přemýšlí. Jednou se zamyslel, kolik vody během jednoho sprchování spotřebuje. Podařilo se mu vymyslet kreativní způsob, jak tento údaj změřit.

1. Nejprve položil sprchovou hlavici na dno sprchy tak, aby mohla voda stříkat kolmo vzhůru. Po puštění voda začala stříkat do výšky $h = 123\,\mathrm{cm}$. Jakou počáteční rychlostí tryská voda z hlavice?

2. Poté zavěsil hlavici, která má i s vodou uvnitř hmotnost $m = 460\,\mathrm{g}$, a na ni připojenou hadičku a pustil vodu. Voda začala stříkat směrem kolmým na hadičku a vychýlila ji o úhel $\alpha = 16^\circ$. Jaký objemový průtok musí v tomto případě mít kohoutek? (Hmotnost hadičky zanedbejte.)

3. Pokud má při sprchování Filip puštěnou vodu po dobu $t = 5\,\mathrm{min}$, jaký objem vody spotřebuje?

Úloha V.E ... Tuhost propisky ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Výfuček si hrál s propiskou a objevil v ní malou pružinku. Zamyslel se, jaké jsou asi její vlastnosti. Pomozte mu a libovolným způsobem změřte tuhost pružinky v obyčejné propisce.

Úloha V.V ... Rande na měsíci ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

1. Hedvi s Patrikem spolu cestovali po měsících Neptunu. S sebou si přivezli airsoftku, pomocí níž chtěli určit poloměr a hmotnost jednoho z měsíců. Když airsoftkou stříleli na Zemi ve vodorovném směru z výšky 1,5 m nad povrchem, náboj urazil 28,3 m než dopadl na zem. Při výstřelu na daném měsíci zjistili, že střela jej oběhne po kruhové orbitě za 3 hodiny, 18 minut a 39 sekund. Následně z těchto údajů určili poloměr a hmotnost tohoto měsíce. Pokuste se o totéž a určete, na kterém měsíci byli.

2. Jakou rychlost musíme dodat satelitu, který obíhá Zemi po geosynchronní orbitě, aby opustil gravitační vliv Země?

Výfučtení: Gravitace a kosmické rychlosti

V každodenním životě se střetáváme hlavně se dvěma silami – gravitační, která drží nás a vše okolo na zemi, a elektromagnetickou, která drží atomy a molekuly pohromadě, umožňuje vznik světla, rádiových vln atd. V tomto Výfučtení se zaměříme na sílu gravitační, její potenciální energii a na to, jak uniknout z jejího působení.

Gravitační pole

Ve fyzice při výpočtech často pracujeme se dvěma různými pohledy na gravitační pole: homogenním a radiálním. Pojďme se nyní podívat na to, jak je možné, že gravitace je popsána dvěma tak různými modely, a jak můžeme gravitační pole v každém z těchto modelů popsat.

Radiální gravitační pole popisuje gravitační působení v obecném případě. Jedná se o teorii, která dobře popisuje gravitaci ve všech běžných podmínkách – od utváření galaxií až po padání jablek na Zemi. Oproti tomu homogenní gravitační pole popisuje gravitaci pouze přibližně v blízkosti zemského povrchu. Jeho výhoda však spočívá v tom, že jeho matematický popis je mnohem jednodušší. V situacích, s nimiž se každodenně setkáváme, nám dává téměř totožné výsledky jako správnější popis pomocí radiálního pole.

Radiální gravitační pole

Jak jsme nastínili výše, radiální pole používáme ve chvíli, kdy se již nenacházíme na povrchu Země (nebo jiného kosmického tělesa) a nemůžeme využít zjednodušení v podobě homogenního pole. Často ho tedy potkáme například při výpočtech pohybu planet kolem Slunce, Měsíce kolem Země nebo pohybu raket a sond, které letí zkoumat planety Sluneční soustavy. Velikost gravitační síly mezi dvěma hmotnými tělesy je dána *Newtonovým gravitačním zákonem*

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{r^2}\,,$$

kde $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ je tzv. gravitační konstanta, m, M jsou hmotnosti těles a r je jejich vzájemná vzdálenost.

Tělesa tedy kolem sebe vytváří tzv. gravitační pole udávající, jak na sebe tělesa gravitačně působí. Toto pole se nejsnáze popisuje pomocí gravitační potenciální energie, která vyjadřuje, jakou energii má jiné těleso, když se v tomto poli nachází

$$E_\mathrm{g} = -G\frac{mM}{r}\,.$$

Při porovnání tohoto vzorce s Newtonovým gravitačním zákonem vidíme rozdíl hlavně ve znaménku a mocnině u vzdálenosti r. Záporné znaménko u potenciální energie souvisí s faktem, že působící síla se vždy snaží snižovat potenciální energii tělesa. Když se vzdálenost mezi tělesy sníží, tak bude díky zápornému znaménku energie více záporná, tedy se též sníží. Gravitační síla se evidentně snaží zmenšovat vzdálenost mezi tělesy – je přitažlivá. Záporné znaménko potřebujeme proto, aby vzorec pro energii tomuto známému faktu odpovídal. (Bez něj by odpovídající síla musela být odpudivá, takže by to tedy nemohla být potenciální energie pro gravitaci.)

Homogenní gravitační pole

Když se nacházíme na povrchu Země, není praktické využívat vzorec výše, jelikož je dosti obtížné s ním počítat. Většinou jsou však rozdíly ve vzdálenostech zanedbatelné vůči poloměru Země $R_\oplus = 6\,371\,\mathrm{km}$. Díky tomu můžeme určit přibližný vzorec pro energii v blízkosti zemského povrchu. Pokud se pohybujeme ve výškách nad povrchem h (kde h je mnohem menší než $R_\oplus$), můžeme vzorec upravit následujícím způsobem:

$$E_\mathrm{g} = -G\frac{mM_\oplus}{h+R_\oplus} = -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus}\frac{1}{1+h/R_\oplus} \approx -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus}\left(1-\frac{h}{R_\oplus}\right) = -G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}mh\,.$$

Při úpravách jsme původní nepřímou úměru mezi potenciální energií a vzdáleností od středu Země r v blízkosti jejího povrchu aproximovali lineární závislostí. Vidíme, že první člen ve výsledku nezávisí na h, a tudíž se vždy při výpočtu změny potenciální energie odečte. U druhého členu označujeme členy ve zlomku jako gravitační zrychlení na Zemi, jejíž hmotnost je $M_\oplus = 5{,}973\,6\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$,

$$a_\mathrm{g} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 9{,}823\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Nesmíme však zapomenout, že kromě gravitační síly působí na povrchu Země kvůli její rotaci i síla odstředivá. Ta závisí na naší zeměpisné šířce – na pólech je nulová, největší je na rovníku. Střední hodnotu gravitačního zrychlení se započítáním odstředivé síly nazýváme tíhové zrychlení a její dohodnutá hodnota činí

$$g = 9{,}807\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Potenciální energie potom nabývá známého tvaru

$$E_\mathrm{p} = mgh$$

a související tíhová síla musí mít tvar ($E_\mathrm{p} = F_\mathrm{G} h$)

$$F_\mathrm{G} = mg\,.$$

Kosmické rychlosti

Potenciální energii radiálního pole můžeme použít k výpočtu tzv. kosmických rychlostí, které popisují různé významné situace spojené s pohyby ve Sluneční soustavě.

1. kosmická rychlost

První kosmická rychlost v_1 je definována jako rychlost potřebná k tomu, abychom se pohybovali kolem Země po kruhové trajektorii o poloměru $R_\oplus$. Víme, že při pohybu po kružnici gravitační síla vyváží odstředivou sílu. Odtud vyjádříme rychlost v_1 jako

$$F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g}\,,$$

$$m\frac{v_1^2}{R_\oplus} = G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2}\,,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}}\,.$$

Dosazením číselných hodnot získáme výsledek $v_1 \doteq 7{,}905\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

2. kosmická rychlost

2. kosmická rychlost v_2 je rychlost potřebná k úniku z gravitačního působení Země. Jinými slovy se musí dostat od Země tak daleko, aby její gravitační působení již bylo zanedbatelné. K výpočtu využijeme zákon zachování mechanické energie. Na počátku je těleso na povrchu Země, tj. ve vzdálenosti $R_\oplus$ a má rychlost v_2. Celková energie tedy je

$$E_\text{počáteční} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus}\,.$$

Jako konec manévru budeme považovat vzdálenost o mnoho větší než původní poloměr Země (formálně řečeno, že budeme v nekonečnu). Uvažujme, že v této velké vzdálenosti se těleso zastaví – a my mu tedy potřebujeme dodat přesně tolik energie, aby se nevrátilo a zároveň žádná nepřebývala. To znamená, že kinetická energie je zde nulová. Obdobně pro potenciální energii bude zlomek též nulový, neboť dělíme velmi velkým (nekonečně velkým) číslem. Konečná energie má velikost

$$E_\text{konečná} = 0\,.$$

Z rovnosti energií určíme 2. kosmickou rychlost

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} = 0\,,$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2M_\oplus G}{R_\oplus}}\,,$$

po dosazení získáme $v_2 = 11{,}19\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Můžeme si povšimnout, že 2. kosmická rychlost se liší od 1. kosmické rychlosti o násobek $\sqrt{2}$. Výsledná kosmická rychlost je velmi vysoká v porovnání s rychlostmi, které v běžném životě potkáváme. Proto jsou pro cesty raket do vesmíru potřeba velmi velké palivové nádrže a obrovské množství energie.

3. kosmická rychlost

Pro 3. kosmickou rychlost platí stejný vztah jako pro druhou, jenom namísto vlivu Země uvažujeme vliv Slunce. Rychlost nutná k opuštění gravitačního vlivu Slunce je rovna

$$v_3 = 42{,}48\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Rakety, které mají uniknout gravitaci Slunce, startují ze Země. Sama Země se pohybuje kolem Slunce svojí vlastní 1. kosmickou rychlostí

$$v_{1\oplus} = \frac{v_3}{\sqrt{2}} = 30{,}04\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

K překonání gravitačního působení Slunce ve výsledku musíme raketě startující z oběžné dráhy Země dodat pouze rychlost $\Delta v = v_3 - v_{1\oplus} = 12{,}44\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Tuto rychlost Δv musí mít raketa až poté, co unikne gravitaci Země. Nás však především zajímá počáteční rychlost, kterou musí mít při startu z povrchu planety. Využijeme k tomu podobné úvahy o energii jako při výpočtu 2. kosmické rychlosti s tím rozdílem, že konečná kinetická energie po úniku působení Země musí být rovna $E'_{\text{konečná}} = m\Delta v^2/2$. Odtud dostaneme

$$\begin{aligned} E_{\text{počáteční}} &= E'_{\text{konečná}}\,, \\ \frac{1}{2}mv_3'^2 - G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus} &= \frac{1}{2}m\Delta v^2\,, \\ v_3' &= \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus} + \Delta v^2}\,. \end{aligned}$$

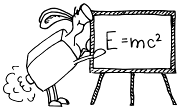
K opuštění Sluneční soustavy při startu ze Země bychom tedy potřebovali rychlost $v_3' = 16{,}73\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

Na závěr však musíme ještě dodat, že vypočítané kosmické rychlosti se samozřejmě liší od skutečných rychlostí raket. Například na raketu startující z povrchu Země působí velký odpor vzduchu, proto jí musíme dodat mnohem více energie.

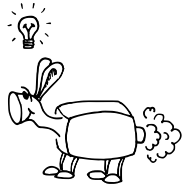
Při opouštění Sluneční soustavy existuje chytřejší a výhodnější postup, než prosté dodání veškeré energie raketě ihned na začátku. K úniku totiž lze využít gravitace ostatních planet. Takovýto manévr se nazývá gravitační prak a v praxi se používá při posílání sond do vzdálenějších koutů Sluneční soustavy.

Patrik Kašpárek
patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Hedvika Kršková
hedvi@vyfuk.mff.cuni.cz



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Předbíháme čas

5 bodů; průměr 4,43; řešilo 67 studentů

Výfučkovi se během cesty mezi Singapurem a surinamským hlavním městem Paramaribo podařil husarský kousek – přistál úplně ve stejný čas, jako vzlétl! Rozhodněte, z jakého z měst a kterým směrem (východ/západ) vyletěl, a vypočtěte průměrnou rychlost jeho letu. Předpokládejte, že obě města leží na rovníku a Singapur je na 104° východní délky a Paramaribo na 55° západní délky.

Pro vyřešení úlohy musíme najít, v jakých časových pásmech se daná města nacházejí. Na internetu[1] zjistíme, že Paramaribo je v časovém pásmu UTC−3 a Singapur v pásmu UTC+8. To znamená, že když v Paramaribu zbývají 3 h do poledne, v Singapuru už je 8 h po poledni. Z toho je zřejmé, že pokud Výfuček chtěl přistát ve stejný čas, jako vzlétl, musel letět západním směrem ze Singapuru do Paramariba a jeho let musel trvat přesně

$$t = 8\,\mathrm{h} - (-3\,\mathrm{h}) = 11\,\mathrm{h}\,.$$

Teď musíme spočítat vzdálenost mezi danými městy. Máme předpokládat, že obě města leží na rovníku, nejkratší cesta mezi těmito dvěma městy tedy bude kopírovat tuto význačnou rovnoběžku, jejíž obvod je

$$o_\mathrm{Z} = 2\pi R_\mathrm{Z}\,,$$

kde $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ je poloměr Země. Letadlo však neobletí celý obvod, nýbrž jen oblouk kružnice se středovým úhlem $104^\circ - (-55^\circ) = 159^\circ$, který odpovídá rozdílu zeměpisných délek obou měst.[2] Vzdálenost obou měst vyjádříme snadno jako

$$d = \frac{159^\circ \cdot o_\mathrm{Z}}{360^\circ} = \frac{159^\circ \cdot 2\pi R_\mathrm{Z}}{360^\circ}\,.$$

Teď již známe dobu letu t i vzdálenost mezi oběma městy d a můžeme vypočítat potřebnou rychlost.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{159^\circ \cdot 2\pi R_\mathrm{Z}}{360^\circ \cdot t} \doteq 1\,600\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

Toto je rychlost, kterou sice dopravní letadla běžně nedosahují, ovšem třeba slavný nadzvukový letoun Concorde by cestu za daný čas hravě zvládl.

Lukáš Linhart
lukasl@vyfuk.mff.cuni.cz

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Paramaribo, https://en.wikipedia.org/wiki/Singapore.

[2] Využíváme zde konvenci, že západní délky mají pro počítání záporné znaménko. Ovšem stačí si uvědomit, že když leží daná města na různých polokoulích, musíme dané úhly sečíst, abychom získali správnou vzdálenost.

Úloha IV.2 ... Účtenka

5 bodů; průměr 4,31; řešilo 198 studentů

Adam nakupoval v Datartu a dostal účtenku dlouhou 43 cm. *Koupil tři položky, z nichž každá na účtence zabírá délku* 1,5 cm, *všechny ostatní části má každá účtenka z Datartu stejné. Kolik nejméně položek by Adam musel koupit, aby jeho nákup zabíral alespoň polovinu délky účtenky? Jak dlouhá by pak účtenka byla?*
Bonus: Najděte nejlevnější produkt v Datartu a spočítejte, kolik by takový nákup stál. Předpokládejte, že každý kus je na účtence zvlášť. Nezapomeňte uvést, o jaký produkt se jedná a kolik stál v době, kdy jste jej hledali (cena se může měnit).

Pokud známe počet zakoupených položek a také délku, kterou na účtence zabírají, můžeme si spočítat, kolik měří její pevně daná část:

$$43\,\mathrm{cm} - 3 \cdot 1{,}5\,\mathrm{cm} = 38{,}5\,\mathrm{cm}$$

Aby nákup zabíral alespoň polovinu délky účtenky, musí zabírat minimálně stejnou délku jako pevně daná část. Když tuto délku známe, můžeme si spočítat, kolik položek by Adam musel koupit.

$$\frac{38{,}5\,\mathrm{cm}}{1{,}5\,\mathrm{cm}} \doteq 26$$

Z rovnice jsme zjistili, že Adam musí koupit minimálně 26 položek, aby zabraly alespoň polovinu účtenky. Délka účtenky poté bude:

$$38{,}5\,\mathrm{cm} + 26 \cdot 1{,}5\,\mathrm{cm} = 77{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Účtenka tedy bude měřit nejméně 77,5 cm.

Bonus

Nejlevnější nezlevněný produkt, který jsme v Datartu našli, je *Box na CD/DVD OEM DVD box 1 SLIM černý*, který stojí 6 Kč. Nákup by tedy stál 156 Kč.

Natálie Lászlóová
`laszloova@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.3 ... Šaliny

6 bodů; průměr 5,31; řešilo 133 studentů

Adam jel ze školy a uvažoval o fascinujícím brzdném systému šalin. Obvykle totiž nebrzdí třením, ale zpětným generováním energie za pomoci motorů. Jaký průměrný výkon elektrická síť přijímá při brždění šaliny o hmotnosti 35 t, *pokud zastavuje z rychlosti* $45\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, *brždění trvá* 15 s *a účinnost rekuperace je* 60 %?

Pohybující se šalina má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

kde m je její hmotnost a v je počáteční rychlost, tedy $45\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Účinnost rekuperace $\eta = 60\,\%$ vyjadřuje, jakou část kinetické energie se podaří přeměnit na elektrickou energii. Tuto energii tedy dostaneme vynásobením E_k hodnotou η

$$E = E_\mathrm{k}\eta = \frac{1}{2}mv^2\eta$$

Průměrný výkon je roven podílu celkové získané energie a času, po který šalina brzdí, tedy

$$P = \frac{E}{t} = \frac{mv^2\eta}{2t}\,,$$

kde budeme dosazovat hmotnost šaliny $m = 35\,\mathrm{t}$, její rychlost $v = 45\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 12{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, účinnost rekuperace $\eta = 0{,}6$ a čas, po který bude energii do sítě předávat, $t = 15\,\mathrm{s}$.

$$P = \frac{mv^2\eta}{2t} = \frac{35\,000\,\mathrm{kg}\cdot(12{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})^2\cdot 0{,}6}{2\cdot 15\,\mathrm{s}} \doteq 109\,000\,\mathrm{W}$$

Elektrická síť přijímá při brzdění šaliny průměrný výkon přibližně 109 kW.

Jakub Savula
savula@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Vlak Praha-Brno

6 bodů; průměr 4,62; řešilo 129 studentů

Soňa si ve vlaku potřebovala umýt ruce. Když pustila vodu z kohoutku, vlak zrovna zrychloval. První kapka dopadla $x = 1\,\mathrm{cm}$ *od středu odtoku, který byl přímo pod kohoutkem. Vypočítejte zrychlení vlaku, jestliže kohoutek je* $y = 15\,\mathrm{cm}$ *nad odtokem.*

Pro výpočet zrychlení vlaku použijeme kinematické rovnice. Kapka padá volným pádem s nulovou počáteční rychlostí a vlak se pohybuje zrychleným pohybem v horizontálním směru se zrychlením a. Než kapka dopadne, vlak se oproti ní stihne posunout o vzdálenost x, pro kterou platí:

$$x = \frac{1}{2}at^2\,,$$

kde t je doba pádu kapky. Odtud vyjádříme zrychlení vlaku

$$a = \frac{2x}{t^2}\,. \tag{1}$$

Potřebujeme spočítat dobu pádu t. Kapka padá se zrychlením g a s nulovou počáteční rychlostí, za čas t tedy urazí vzdálenost y. Můžeme tedy napsat

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}}\,.$$

Dosazením doby pádu do rovnice (1) pak získáme zrychlení vlaku

$$a = \frac{2x}{2y/g} = \frac{gx}{y}$$

$$a = \frac{9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\cdot 1\,\mathrm{cm}}{15\,\mathrm{cm}} \doteq 0{,}65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Vlak se pohyboval se zrychlením $0{,}65\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Alena Mouchová
mouchova@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.5 ... Hustá hvězda

7 bodů; průměr 5,43; řešilo 72 studentů

Výfuček se svou lodí přistál na neznámé planetě daleko v hlubokém vesmíru. V rámci své expedice měl za úkol zjistit hustotu hvězdy, kolem které planeta po kružnici obíhá. Po dlouhé době strávené na planetě však Výfuček při svém bádání zjistil pouze úhlovou velikost hvězdy α a dobu trvání jednoho roku na planetě T. Naštěstí si však uvědomil, že toto mu k určení hustoty hvězdy stačí. Podaří se vám to také?

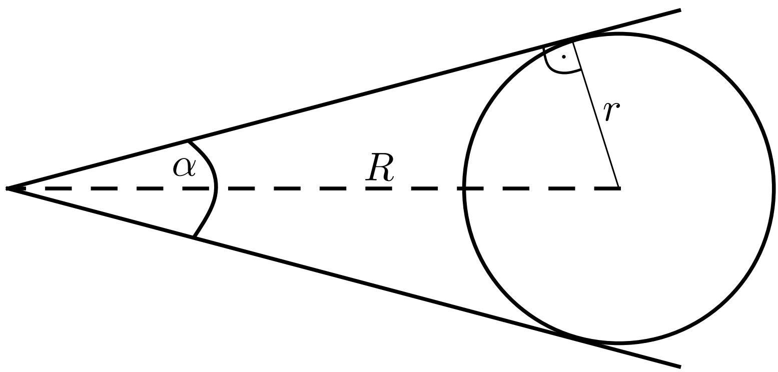
1. *Vyjádřete obecně hustotu hvězdy ρ pomocí její hmotnosti M, úhlové velikosti α a vzdálenosti hvězdy od planety R. Můžete využít předpokladu, že vzdálenost hvězdy od planety R je mnohem větší než poloměr hvězdy r.*
2. *Označme hmotnost planety m. Jaké síly na planetu při oběhu kolem hvězdy působí? Dokážete z nich vyjádřit vztah mezi veličinami R, M a T (a fyzikálními konstantami)?*
3. *Určete hustotu hvězdy ρ pouze pomocí naměřených veličin α a T (a fyzikálních konstant).*

1. Nejprve vyjádříme hustotu hvězdy přes její hmotnost M a její objem V, který spočítáme jako objem koule o poloměru r dle následujícího vzorce:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.$$

Pro hustotu, kterou určíme jako podíl hmotnosti a objemu hvězdy, tedy dostaneme vztah

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r^3} \,. \tag{2}$$



Obr. 2: Pozorovaná úhlová velikost α hvězdy s poloměrem r ze vzdálenosti R.

Nyní bychom chtěli poloměr hvězdy r vyjádřit pomocí její úhlové velikosti. Z obrázku 2 vidíme, že platí vztah

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{R} \,, \tag{3}$$

kde r je poloměr hvězdy a R je vzdálenost hvězdy od planety.

Pro malé hodnoty úhlu α můžeme použít následující aproximaci[3]:

$$\sin x \approx x\,,$$

kde x je úhel v tzv. *radiánech*. Radián je přirozenější jednotka pro úhel než stupeň a mezi úhlem x vyjádřeným ve stupních a v radiánech platí převodní vztah:

$$x\,\text{„v radiánech“} = \frac{2\pi}{360^\circ}x\,\text{„ve stupních“}\,.$$

S využitím této aproximace můžeme upravit vztah (3) na

$$r = \frac{R\alpha}{2}\,.$$

Po dosazení tohoto vyjádření do vztahu (2) získáme pro hustotu hvězdy vyjádření pomocí hmotnosti hvězdy M, úhlové velikosti hvězdy α a vzdálenosti hvězdy od planety R:

$$\rho = \frac{6M}{\pi\alpha^3R^3}\,. \tag{4}$$

2. Na planetu při oběhu kolem hvězdy působí gravitační síla hvězdy a odstředivá síla. Gravitační síla, která působí mezi dvěma tělesy o hmotnostech m a M ve vzájemné vzdálenosti R, je dána následujícím vztahem:

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{R^2}\,,$$

kde $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ je gravitační konstanta. Odstředivá síla působící na těleso pohybující se po kružnici o poloměru R rychlostí v je rovna

$$F_\mathrm{o} = \frac{v^2m}{R}\,.$$

Periodu oběhu planety T určíme jako podíl dráhy uražené planetou za jeden oběh kolem své hvězdy, tedy $s = 2\pi R$, a její rychlosti v.

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{2\pi R}{T} \tag{5}$$

Odstředivá síla působící na planetu je v rovnováze s gravitační silou (uvažujeme, že planeta obíhá po kružnici a její vzdálenost od hvězdy se nemění)

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{o}\,,$$

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{v^2m}{R}\,.$$

Z tohoto vztahu si opět vyjádříme rychlost planety v, která bude samozřejmě stejná jako ta, již jsme vyjádřili ve vztahu (5). Tímto získáme vztah mezi hmotností hvězdy M, vzdáleností hvězdy od planety R a časem oběhu planety T.

$$\sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \tag{6}$$

[3]Cca pro $\alpha \leq 9{,}98^\circ$ se radiánová hodnota úhlu liší od hodnoty $\sin\alpha$ o méně než 1 %.

Poznamenejme, že jsme nyní vlastně odvodili 3. Keplerův zákon pro speciální případ pohybu po kružnici. Skutečně pokud naši rovnici umocníme a přeuspořádáme, dostaneme známou rovnici

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,.$$

3. Pro dosazení do vzorce pro hustotu (4) se nám bude hodit ze vztahu (6) vyjádřit vzdálenost hvězdy a planety R.

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Teď již můžeme provést zmíněné dosazení do vztahu (4) a upravit získanou rovnost, abychom vyjádřili hustotu hvězdy ρ jen pomocí naměřené úhlové velikosti hvězdy α a doby oběhu planety kolem této hvězdy T.

$$\rho = \frac{6M}{\pi\alpha^3}\frac{4\pi^2}{GMT^2} = \frac{24\pi}{GT^2\alpha^3}$$

Vojtěch Kubrycht
kubrycht@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Olejujeme

7 bodů; průměr 4,57; řešilo 87 studentů

V různých mechanických součástkách, jako jsou např. různá kola nebo klouby, se využívá olej ke snížení tření. Vaším úkolem bude vyzkoušet, zda to opravdu funguje.

Najděte doma plechovou plochu (například plech na pečení) a libovolný další předmět (například hrnek, skleničku, plastovou krabičku, ...) a změřte koeficient statického tření mezi plechem a tímto předmětem.

Poté plech i svůj předmět namažte libovolným olejem a opět změřte koeficient tření. Oba výsledky porovnejte a zkuste odhadnout, jak přesně se vám koeficienty podařilo určit. Nezapomeňte také uvést, z jakého materiálu byl druhý vámi použitý předmět.

Teorie

Koeficient statického tření udává míru odporu mezi dvěma povrchy, které jsou v klidu a ní mezi nimi relativní pohyb. Vyjadřuje tedy sílu potřebnou k rozpohybování těchto dvou povrchů, přičemž platí přímá úměra – čím větší tření, tím větší potřebná síla. V matematických rovnicích se koeficient tření obvykle označuje symbolem μ_s a je bezrozměrný (často se setkáme i s označením f).

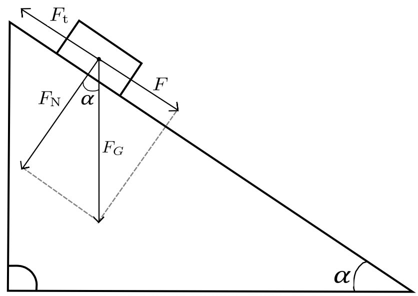
Pokud máte například krabici na podlaze a snažíte se ji posunout, síla, kterou musíte uplatnit, je úměrná koeficientu statického tření mezi povrchem krabice a podlahou a zároveň tíze krabice. Jakmile začnete krabici posunovat, přecházíte do oblasti kinetického tření, přičemž kinetický koeficient je obvykle menší než statický.

V našem experimentu studujeme rozdíl ve statickém koeficientu tření s použitím oleje oproti případu bez oleje. Olej má mazací vlastnosti, což znamená, že vytváří mezi povrchy kluznou vrstvu, snižuje odpor a tím i koeficient statického tření.

Při výpočtech budeme vycházet ze vzorečku pro třecí sílu F_t

$$F_\mathrm{t} = \mu_\mathrm{s} \cdot F_\mathrm{N}\,,$$

kde F_N je normálová síla, tedy síla působící kolmo na podložku, na které těleso leží.



Obr. 3: Znázornění sil působících na těleso na nakloněné rovině.

Koeficient tření změříme s využitím nakloněné roviny. Uvažujme těleso na rovině nakloněné o úhel α tak jako na obrázku 3. Na takovéto těleso působí tíhová síla F_G, kterou rozložíme na tečnou (rovnoběžnou) složku $F_{\|} = F_\mathrm{G} \sin\alpha$ a normálovou (kolmou) složku $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G}\cos\alpha$. Tečná složka se pokouší rozpohybovat těleso a pohybu brání třecí síla, jejíž maximální možná velikost[4] je dána dříve uvedeným vztahem

$$F_\mathrm{t} = \mu_\mathrm{s} \cdot F_\mathrm{N} = \mu_\mathrm{a} \cdot F_\mathrm{G} \cos\alpha\,.$$

Uvažujme nyní, že úhel náklonu roviny postupně zvětšujeme, dokud se těleso nezačne pohybovat. Těleso se zjevně rozpohybuje přesně v okamžiku, kdy bude velikost tečné složky tíhové síly rovna velikosti maximální třecí síly

$$\mu_\mathrm{s} F_\mathrm{G} \cos\alpha = F_\mathrm{G} \sin\alpha\,.$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit koeficient tření pouze pomocí úhlu náklonu roviny:

$$\mu_\mathrm{s} = \mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

K určení koeficientu tření tedy stačí pouze změřit úhel nakloněné roviny, pro který se těleso zrovna začne pohybovat.

Měření

Připravíme si plechovou plochu a druhý předmět, pro který budeme měřit koeficient statického tření. My jsme zvolili plech na pečení a plastovou misku a pro lepší znázornění výsledků také keramickou misku.

Misku položíme na plech a začneme jej pomalu naklánět. Pomocí úhloměru změříme s přesností 2° úhel, pod kterým se miska začala pohybovat. Měření jsme opakovali celkem 5krát.

Plech poté namažeme olejem a znovu změříme úhel, pod kterým se začne miska pohybovat. Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce 1.

[4] Třecí síla vždy působí proti směru, kterým se snažíme těleso rozpohybovat, její velikost ovšem není fixní. Dokud je těleso v klidu, je velikost třecí síly rovna velikosti síly, kterou na těleso působíme. Těleso se začne pohybovat, jakmile působící síla přesáhne velikost $\mu_\mathrm{s} F_\mathrm{N}$.

předmět n	plastová miska bez oleje	plastová miska s olejem	keramická miska bez oleje	keramická miska s olejem
1	24°	17°	16°	9°
2	25°	18°	17°	10°
3	26°	16°	17°	8°
4	26°	19°	15°	9°
5	27°	16°	18°	9°
$\overline{\alpha}$	27°	17°	17°	9°
μ_s	0,48	0,31	0,30	0,16

Tab. 1: Naměřené hodnoty úhlu náklonu plechu

Diskuze a závěr

Z výsledných hodnot vidíme, že použití oleje mělo výrazný vliv na snížení koeficientu statického tření. Nižší hodnota koeficientu statického tření ukazuje, že olej účinně snižuje tření mezi plechovou plochou a předmětem.

Toto zjištění je v souladu s očekáváním, protože oleje mají schopnost mazání a vytváření kluzných povrchů, což vede k nižšímu tření mezi materiály.

Natálie Lászlóová
laszloova@vyfuk.mff.cuni.cz

Alena Mouchová
mouchova@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.V ... Cítíte to napětí?

7 bodů; průměr 4,57; řešilo 94 studentů

1. *Stolní počítač, který je připojen do zásuvky evropského typu (230 V, 50 Hz), má průměrný příkon 60 W. Jaký (efektivní) proud odebírá ze sítě?*

2. *Dráty vedoucí vysoké napětí z Prahy do Brna mají délku zhruba 230 km. Na jejich začátku je napětí 400 kV, avšak na jejich konci je už jen 395 kV. Pro přenos napětí jsou použity svazky lan hliníku a železa typu AlFe 6 o průřezu 300 mm^2. K jaké ztrátě výkonu dojde na této trase? Potřebné údaje si vyhledejte.*

3. *Soně byla opět zima, a tak si chtěla v místnosti přitopit elektrickým ohřívačem, který má vnitřní odpor 100 Ω a účinnost 85 %. Při čekání na zahřátí přemýšlela, co by dělala, kdyby neměla přístupnou klasickou zásuvku, ale pouze zásuvku třífázovou. Napadlo ji pouze vytvořit správné napětí pomocí transformátoru. Kolik závitů by musela mít sekundární cívka, jestliže primární cívka má 1 500 závitů a Soňa chce vyhřívat místnost výkonem 500 W?*

1. Jak z Výfučtení víme, výkon elektrického proudu můžeme vypočítat pomocí vzorce $P = U \cdot I$. Abychom vypočítali potřebný proud I, musíme vzorec upravit do tvaru

$$I = \frac{P}{U}\,,$$

do nějž můžeme dosadit hodnoty ze zadání. Tím dostáváme hodnotu proudu, který počítač odebírá
$$I = \frac{60\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V}} \doteq 0{,}261\,\mathrm{A} = 261\,\mathrm{mA}\,.$$

2. Pro vypočítání výkonu na vedení musíme znát napětí a proud. Napětí na vedení jsme schopni určit přímo ze zadání jako rozdíl počátečního (400 kV) a koncového (395 kV) napětí. Celkové napětí mezi konci celého vodiče tedy činí 5 kV. Proud na vedení můžeme vyjádřit z Ohmova zákona jako
$$I = \frac{U}{R}\,,$$
z čehož po dosazení do rovnice výkonu získáme vztah
$$P = \frac{U^2}{R}\,. \tag{7}$$
Zde ale narážíme na problém, jelikož neznáme hodnotu odporu R. Můžeme jej ale odvodit ze vztahu pro odpor vodičů
$$R = \rho\frac{l}{S}\,, \tag{8}$$
kde $l = 230\,\mathrm{km}$ je délka vedení a $S = 300\,\mathrm{mm}^2$ značí plochu vodiče. Poslední informace, která nám chybí, je měrný elektrický odpor ρ, který můžeme díky informaci o materiálu vodiče vyhledat. Když se však například podíváme na internet[5], nalezneme, že se hodnoty odporů udávají v jednotkách $\Omega{\cdot}\mathrm{km}^{-1}$ dle specifikovaného průřezu. Konkrétně pro vodič AlFe 6 o průřezu $300\,\mathrm{mm}^2$ nacházíme hodnotu $0{,}097\,\Omega{\cdot}\mathrm{km}^{-1}$. Nenašli jsme tedy hodnotu ρ, ale poměru ρ/S. Po dosazení této hodnoty společně se vztahem (8) do rovnice (7) dostáváme
$$P = \frac{U^2}{l\rho/S} = \frac{(5\,000\,\mathrm{V})^2}{230\,\mathrm{km}\cdot 0{,}097\,\Omega{\cdot}\mathrm{km}^{-1}} \doteq 1{,}12\,\mathrm{MW}.$$
Vidíme tedy, že ztráty na takovém vedení jsou poměrně veliké. Ve skutečnosti budou pravděpodobně o něco menší, protože na vedení nezaznamenáme tak drastickou změnu napětí; nicméně vidíme, že při přenosu energie na takové dálky to není nijak zanedbatelný jev.

3. Abychom mohli sestavit transformátor, musíme znát potřebné cílové napětí. To můžeme získat ze znalosti výkonu a odporu odvozením z dřívější rovnice (7). V té však nesmíme zapomenout započítat účinnost vytápění, abychom získali potřebný výkon. Napětí tedy vyjádříme jako
$$P = \frac{U^2}{R}\eta \quad\Rightarrow\quad U = \sqrt{\frac{PR}{\eta}}\,.$$
Potřebný počet závitů transformátoru odvodíme z rovnosti poměrů napětí a počtů závitů cívek transformátoru:
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad\Rightarrow\quad N_2 = N_1\frac{U_2}{U_1}\,,$$

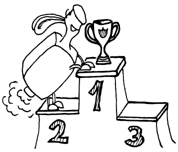
[5] https://dspace.vutbr.cz/bitstream/handle/11012/26795/final-thesis.pdf

kde $U_2 = U$ je koncové napětí, $N_1 = 1\,500$ počet závitů primární cívky a $U_1 = 400\,\mathrm{V}$ je napětí na primární cívce, které získáme z třífázové zásuvky. Dosazením výstupního napětí získáváme počet závitů sekundární cívky N_2:

$$N_2 = \frac{N_1 \cdot \sqrt{PR/\eta}}{U_1} = \frac{1\,500 \cdot \sqrt{500\,\mathrm{W} \cdot 100\,\Omega/0{,}85}}{400\,\mathrm{V}} \doteq 909{,}51\,\text{závitů}\,.$$

Jelikož se jedná o počet závitů (což obvykle bývá celé číslo), bude mít sekundární cívka 910 závitů.[6]

Adam Krška
`adam@vyfuk.mff.cuni.cz`



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na `https://vyfuk.org`.

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Jan František Lukáš*	ZŠ Dr. M. Tyrše Hrdějovice	5	5	6	6	7	5	7	**41**	**148**
2.	*Richard Menšík*	G, Boskovice	5	5	6	6	6	7	7	**42**	**141**
3.	*Filip Petrásek*	ZŠ Nepomucká, Praha 5 - Košíře	5	5	6	6	4	7	4	**37**	**107**
4.	*Petr Kysela*	G, Český Krumlov	5	4	6	4	–	4	1	**24**	**91**
5.	*Jason Sýkora*	G K. Čapka, Dobříš	–	5	–	3	–	5	1	**14**	**83**
6.	*Martin Jirout*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**81**
7.–8.	*Melinka Čejpová*	Arcibiskupské G, Praha	5	5	6	–	–	–	0	**16**	**77**
7.–8.	*Martina Mrázová*	ZŠ Palachova, Brandýs nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**77**
9.–10.	*Emilie Kimmerová*	ZŠ a MŠ Kotlářská, Brno	5	5	5	–	–	–	–	**15**	**69**
9.–10.	*Marek Roučka*	ZŠ Dobřany	5	5	–	1	–	5	–	**16**	**69**
11.	*Anna Ličková*	G, Litoměřická, Praha	5	4	6	–	–	6	–	**21**	**66**
12.	*Laura Kvíčalová*	ZŠ a MŠ Petra Strozziho Praha 8	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**63**
13.	*František Urban*	G, Benešov	5	–	–	6	–	–	–	**11**	**59**
14.	*Filip Svatoš*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	5	–	–	–	–	1	–	**6**	**58**
15.–16.	*Filip Mayer*	ZŠ Svážná, Most	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**52**
15.–16.	*Tobiáš Vágner*	G J. Vrchlického, Klatovy	4	5	–	–	–	3	1	**13**	**52**
17.	*Ondřej Mendlík*	ZŠ a MŠ Nerudova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**51**
18.	*Tobias Záveský*	ZŠ Hornická, Tachov	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**49**
19.	*Monika Pachlopníková*	ZŠ Brno, Sirotkova 36	–	4	–	–	–	2	–	**6**	**48**
20.–21.	*Kristýna Rybková*	ZŠ Úvoz, Brno	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**47**
20.–21.	*Marek Tóth*	G, Ústí nad Orlicí	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**47**
22.	*Karel Olšar*	G, Český Krumlov	4	3	–	–	–	–	5	**12**	**45**
23.–24.	*Kristýna Kuldová*	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**44**
23.–24.	*Filip Macák*	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**44**
25.	*Ema Paseková*	Masarykovo G, Vsetín	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**34**

[6] Toto zaokrouhlení můžeme chápat tak, že Sonin ohřívač bude mít jen přibližně výkon 500 W, což je pro nás v pořádku.

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
26.	*Vojtěch Kubišta*	ZŠ Jakuba Arbesa, Most	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**33**
27.	*Anna Neumannová*	22. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**32**
28.–30.	*Aneta Mužíková*	ZŠ Hornická, Tachov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**30**
28.–30.	*Martin Rakušan*	ZŠ sv. Voršily Praha 1	5	3	–	–	–	–	–	**8**	**30**
28.–30.	*Viktorie Zemanová*	ZŠ Kralovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**30**
31.	*Elen Kršková*	G, Mikulov	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**27**
32.	*Štěpán Smolík*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**26**
33.–34.	*Patrik Chlup*	ZŠ Boskovice	1	–	–	–	–	–	–	**1**	**25**
33.–34.	*Richard Kulda*	ZŠ a MŠ Dolní Loučky	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**25**
35.	*Julie Carolina Mecnerová*	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**24**
36.–37.	*Adam Abd El Dayem*	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
36.–37.	*Antonín Žaloudek*	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
38.	*Johana Vacková*	22. základní škola Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**18**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
1.	*Oleg Šatánek*	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	4	5	6	6	7	7	7	**42**	**166**
2.	*Lukáš Kopecký*	G, Litomyšl	5	5	6	6	7	7	6	**42**	**159**
3.	*Vladimír Kotsch*	Gymnázium Sázavská Praha 2	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**157**
4.	*Viktorie Snášelová*	Masarykovo G, Plzeň	5	5	6	5	7	2	3	**33**	**140**
5.	*Pavel Doskočil*	G, Žamberk	5	0	6	6	7	5	4	**33**	**132**
6.	*Blanka Nováková*	ZŠ a MŠ Křídlovická, Brno	5	5	6	4	1	7	5	**33**	**120**
7.	*Václav Bláha*	ZŠ a MŠ Školní 93„ Švihov	5	5	4	1	–	5	6	**26**	**118**
8.–9.	*Kateřina Bartková*	Gymnázium Brno-Bystrc	4	5	6	6	3	4	1	**29**	**105**
8.–9.	*Tobiáš Radkovský*	G prof. J. Patočky, Praha	5	1	6	6	–	–	1	**19**	**105**
10.	*Antonín Vácha*	ZŠ Chrudim 3	5	3	–	–	2	3	1	**14**	**104**
11.	*Eva Brožovičová*	Podkrušnohorské G, Most	4	5	6	2	–	4	7	**28**	**103**
12.	*Jaroslav Motlík*	G Opatov, Praha	4	5	6	6	–	–	–	**21**	**102**
13.–15.	*Martin Houška*	G a SOŠ, Rokycany	5	5	–	1	4	7	–	**22**	**101**
13.–15.	*Thea Pauerová*	Mensa G, Praha 6	5	5	6	6	–	6	4	**32**	**101**
13.–15.	*Metoděj Šámal*	ZŠ ul. 5. května, Liberec 1	5	3	5	6	7	–	–	**26**	**101**
16.–17.	*Anna Přívětivá*	G, Litoměřická, Praha	5	5	6	6	–	7	–	**29**	**99**
16.–17.	*Lada Vysloužilová*	ZŠ Verdunská, Teplice	4	3	6	6	–	–	–	**19**	**99**
18.–19.	*Pavla Holečková*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	4	5	5	6	7	6	3	**36**	**98**
18.–19.	*Lukáš Laštovička*	G Neumannova, Žďár n. S.	5	5	4	6	7	–	5	**32**	**98**
20.	*František Šustr*	Fak. ZŠ při PedF UK, Praha 5	5	4	6	6	–	4	–	**25**	**93**
21.	*Natálie Hnětkovská*	G, Benešov	5	3	–	4	–	–	–	**12**	**85**
22.	*Štěpán Vlasák*	G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady	4	5	5	3	4	3	–	**24**	**83**
23.	*Marie Ježková*	ZŠ T. G. Masaryka Rokycany	5	5	6	6	–	–	2	**24**	**77**
24.	*Bartoloměj Stoklásek*	ZŠ Troubelice	5	4	6	6	–	–	–	**21**	**76**
25.–26.	*Tomáš Kvapil*	PORG, Praha	4	3	6	–	–	–	–	**13**	**74**
25.–26.	*Andrea Vaňková*	G, Sušice	5	5	2	–	–	–	0	**12**	**74**
27.	*Valentýna Sochorová*	G, Olomouc-Hejčín	4	5	–	6	–	–	–	**15**	**72**
28.	*Eva Kišová*	ZŠ U Vorliny, Vlašim	5	5	–	6	–	–	1	**17**	**69**
29.	*Henryk Berka*	G, Roudnice nad Labem	5	5	0	0	–	–	–	**10**	**68**
30.	*Jan Kadlec*	ZŠ a MŠ Školní 93„ Švihov	4	4	5	–	–	1	–	**14**	**66**
31.	*Fabien Bartůněk*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**65**
32.–33.	*Dita Křížková*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	5	5	6	–	–	–	–	**16**	**63**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	6	6	7	7	7	**43**	**172**
32.–33.	*Alžběta Průšová*	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	**63**
34.–36.	*Jan Hanousek*	ZŠ a MŠ Jičín	5	5	–	2	–	–	–	**12**	**62**
34.–36.	*Štěpán Hrabina*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**62**
34.–36.	*Jan Josef Veselý*	Purkyňovo G, Stážnice	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**62**
37.	*Dominik Stoklasek*	ZŠ Troubelice	5	–	–	–	–	–	–	**5**	**59**
38.	*Kristýna Musilová*	ZŠ T. G. Masaryka Mnichovice	–	3	–	–	–	–	2	**5**	**57**
39.–40.	*Jan Foldyna*	Anglofonní základní škola, z. ú.	5	5	6	6	–	–	–	**22**	**56**
39.–40.	*Petr Hubený*	G K. Čapka, Dobříš	4	5	–	1	–	1	–	**11**	**56**
41.	*David Hložek*	ZŠ Vybíralova, Praha 9 - Černý M	–	–	–	–	–	–	–	–	**54**
42.–43.	*Eliška Humlová*	G, Cheb	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**52**
42.–43.	*Michal Klapetek*	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	**52**
44.–45.	*Michal Bartoš*	ZŠ Veronské náměstí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**51**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.	*Adam Houdek*	ZŠ a MŠ , Březová	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**149**
2.	*Matěj Dudek*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**143**
3.	*Erik Macek*	G Opatov, Praha	–	5	6	6	7	4	7	**35**	**142**
4.	*Emma Polcarová*	Sportovní G, Plzeňská, Kladno	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**136**
5.	*Jan Horský*	G, Brno-Řečkovice	–	5	6	6	7	7	6	**37**	**126**
6.	*Roman Velko*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**124**
7.	*Matěj Křivánek*	G, Moravské Budějovice	–	5	4	1	7	5	–	**22**	**123**
8.	*Aneta Brzokoupilová*	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	6	6	7	6	5	**35**	**121**
9.	*Dario Heinich*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	5	3	2	5	6	7	**28**	**120**
10.	*Rozálie Michaela Furchová*	G, Židlochovice	–	5	6	6	4	7	5	**33**	**109**
11.	*Jakub Vávra*	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	3	6	6	6	2	5	**28**	**103**
12.	*Radim Zikmund*	ZŠ Tuchlovice	–	4	5	6	–	4	6	**25**	**99**
13.	*Mariana Hořínková*	Wichterlovo G, Ostrava	–	5	6	5	–	6	3	**25**	**98**
14.	*Barbora Petrásková*	28. základní škola Plzeň	–	5	6	6	–	3	7	**27**	**96**
15.	*Eliška Knopfová*	ZŠ J. A. Kom. Hradec Králové	–	5	5	6	–	4	–	**20**	**95**
16.–17.	*Květa Bouchalová*	G, Olomouc-Hejčín	–	5	5	6	–	–	–	**16**	**94**
16.–17.	*Julie Judásková*	G a SOŠZE, Vyškov	–	5	6	6	7	–	1	**25**	**94**
18.	*Dominik Svatoš*	G J. Barranda, Beroun	–	5	6	4	–	2	4	**21**	**90**
19.	*Viktor Novák*	Nový PORG, Praha	–	5	5	3	2	3	1	**19**	**89**
20.	*Ondřej Laštovička*	G Neumannova, Žďár n. S.	–	5	4	6	6	–	5	**26**	**87**
21.	*Michal Blahoš*	G, Benešov	–	5	6	6	6	5	7	**35**	**86**
22.	*Magdalena Čejpová*	Arcibiskupské G, Praha	–	5	6	6	–	–	7	**24**	**85**
23.–24.	*Amálie Hlávková*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	5	4	–	–	4	–	**13**	**83**
23.–24.	*Michal Jirout*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	5	6	4	–	–	6	**21**	**83**
25.	*Marek Růžička*	G, Brno-Řečkovice	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**79**
26.–27.	*Flora Eisner*	G, Litoměřická, Praha	–	5	6	5	7	6	–	**29**	**78**
26.–27.	*Martina Merglová*	Krkonošské G a SOŠ Vrchlabí	–	–	–	–	–	–	7	**7**	**78**
28.	*Jakub Kolář*	G Opatov, Praha	–	5	6	3	3	–	1	**18**	**76**
29.	*Angela Poláchová*	Biskupské G, Brno	–	3	6	6	–	–	–	**15**	**75**
30.	*Kristián Mošna*	Základní škola Dědina	–	5	6	1	–	4	–	**16**	**74**
31.	*Antonín Šreiber*	ZŠ Skálova, Turnov	–	5	5	–	0	–	3	**13**	**71**
32.	*Karolína Vtípilová*	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	5	6	6	–	0	7	**24**	**70**
33.	*Sofie Hana Klímová*	G, Brno-Řečkovice	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**69**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
34.–35.	*Marek Bauckmann*	G K. Čapka, Dobříš	–	4	–	6	–	–	–	**10**	**68**
34.–35.	*Vratislav Košina*	ZŠ a MŠ Věry Čáslavské, Praha 6	–	4	5	6	7	–	–	**22**	**68**
36.	*Vojtěch Saic*	ZŠ a MŠ Dobratická, Praha 9	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**66**
37.	*Lukáš Loukota*	G Stříbro	–	5	4	1	–	–	7	**17**	**65**
38.	*Andrea Kozumplíková*	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	3	2	3	**8**	**64**
39.	*Jan Bezděk*	ZŠ Náchod - Plhov	–	1	3	6	7	–	3	**20**	**62**
40.–42.	*Kateřina Kučerová*	G Ústavní, Praha	–	5	3	–	3	–	–	**11**	**59**
40.–42.	*Jan Roháč*	ZŠ Tuchlovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**59**
40.–42.	*Darek Zápeca*	G a JŠ, Břeclav	–	–	–	0	0	–	–	**0**	**59**
43.	*Josef Jaglarz*	ZŠ Hrušovany nad Jevišovkou	–	4	6	6	7	–	1	**24**	**58**
44.–46.	*Magdalena Hyhlíková*	G Nad Kavalírkou, Praha	–	5	5	6	–	4	–	**20**	**56**
44.–46.	*Vít Krejčí*	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**56**
44.–46.	*Jan Štábl*	ZŠ Bratří Čapků, Ústí nad Orlicí	–	0	6	0	5	0	2	**13**	**56**
47.–48.	*Ondřej Lisický*	Podkrušnohorské G, Most	–	3	4	6	–	–	–	**13**	**55**
47.–48.	*Maria Sidorova*	První české G, Karlovy Vary	–	3	4	–	–	4	6	**17**	**55**
49.–50.	*Klára Kasalová*	G, Dačice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**54**
49.–50.	*Stella Klapačová*	G Opatov, Praha	–	4	6	4	5	6	5	**30**	**54**
51.	*Viktor Janda*	ZŠ Roudnice n.L.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**53**
52.–54.	*Miroslav Štajner*	ZŠ Komenského, Hořovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**52**
52.–54.	*Klára Valentová*	Slovanské G, Olomouc	–	4	3	2	–	–	–	**9**	**52**
52.–54.	*Jan Zámečník*	Biskupské G, Brno	–	5	6	0	–	0	–	**11**	**52**
55.–56.	*Jan Pertlík*	ZŠ a MŠ nám. Jiřího z Lobkovic,	–	5	4	0	–	–	3	**12**	**49**
55.–56.	*Tadeáš Smička*	ZŠ Dr. Hrubého, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**49**
57.–59.	*Gleb Baulin*	První české G, Karlovy Vary	–	5	6	6	–	–	–	**17**	**47**
57.–59.	*Adam Nikodým*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	5	–	0	–	–	–	**5**	**47**
57.–59.	*Lukáš Vávra*	ZŠ Balbínova, Příbram II	–	4	3	3	–	–	–	**10**	**47**
60.–61.	*Šimon Klich*	ZŠ J. Valčíka, Ostrava-Poruba	–	1	6	4	–	–	–	**11**	**46**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
1.–2.	*Anna Matiášková*	G, Turnov	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**146**
1.–2.	*Sámo Šatánek*	ZŠ a MŠ Telecí	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**146**
3.–4.	*Daniel Přívětivý*	G Arcus, Praha	–	5	6	6	7	6	7	**37**	**144**
3.–4.	*Akim Sklenka*	G, Žamberk	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**144**
5.	*Jana Feldbabelová*	ZŠ Jemnice	–	5	6	6	7	7	5	**36**	**142**
6.	*Charlotte Hosszú*	G B. Němcové, HK	–	5	6	6	7	7	7	**38**	**141**
7.–8.	*Alex Faivre*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	5	6	3	6	7	7	**34**	**137**
7.–8.	*Max Menčík*	ZŠ Kuncova, Praha 5 - Stodůlky	–	3	6	6	7	5	7	**34**	**137**
9.	*Petr Mareš*	ZŠ a MŠ Třebíz., Kralupy n. V.	–	5	6	5	7	5	7	**35**	**136**
10.	*Petr Barták*	Slovanské G, Olomouc	–	5	6	6	7	7	4	**35**	**134**
11.	*Jonáš Fiala*	G, Čelákovice	–	4	5	4	6	7	7	**33**	**133**
12.	*Martin Černý*	G Teplice	–	5	5	6	7	6	6	**35**	**127**
13.–14.	*Tamara Dědková*	G, Roudnice nad Labem	–	5	5	6	2	7	3	**28**	**124**
13.–14.	*Martin Podpěra*	G Ústavní, Praha	–	5	6	6	4	4	2	**27**	**124**
15.	*Marie Hrubá*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	4	6	7	7	3	**32**	**123**
16.–17.	*Svetlana Achedzak*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	5	3	5	2	3	**22**	**117**
16.–17.	*Alice Dědicová*	ZŠ Amálská, Kladno	–	2	6	6	5	1	6	**26**	**117**
18.	*Hana Dziková*	Klvaňovo G Kyjov	–	5	4	6	4	5	5	**29**	**109**
19.	*Matěj Sochor*	G prof. J. Patočky, Praha	–	3	6	6	–	2	2	**19**	**106**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**V**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	6	6	7	7	7	**38**	**152**
20.	*Jan Chalupa*	ZŠ E. Rošického, Jihlava	–	5	6	–	3	3	6	**23**	**105**
21.	*Josef Eliáš Formánek*	G, Křenová, Brno	–	4	5	4	–	–	5	**18**	**102**
22.	*Julie Krčmařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	5	4	3	5	–	3	**20**	**98**
23.	*Hoang Ngan Nguyen*	Klvaňovo G Kyjov	–	4	4	6	4	2	5	**25**	**97**
24.	*Marie Prokešová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	2	6	5	–	3	5	**21**	**96**
25.	*Lucie Pinkerová*	ZŠ a MŠ Školní, Švihov	–	4	6	6	7	7	7	**37**	**95**
26.	*Maxmilián Ožana*	G F. Hajdy, Ostrava	–	5	6	6	4	6	6	**33**	**93**
27.	*Aneta Kaniová*	G Orlová	–	5	5	3	–	1	4	**18**	**92**
28.	*Barbora Samková*	ZŠ Prodloužená, Pardubice	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**90**
29.	*Martin Myška*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**89**
30.–31.	*Lucie Kolářová*	G, Dačice	–	5	6	–	1	–	4	**16**	**85**
30.–31.	*Dominik Kudr*	ZŠ a MŠ Studenec	–	5	4	4	–	6	5	**24**	**85**
32.	*Martin Vávra*	ZŠ O. Březiny Jaroměřice n/R.	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**79**
33.	*Michal Bělohlávek*	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	0	6	3	7	–	4	**20**	**77**
34.–35.	*Matěj Knop*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	6	4	–	3	**24**	**75**
34.–35.	*Nela Žalská*	ZŠ Dr. M. Tyrše, Česká Lípa	–	5	5	3	3	1	5	**22**	**75**
36.	*Filip Rezek*	G J.Ž.	–	5	6	–	5	–	–	**16**	**73**
37.	*Jonáš Bartok*	G B. Němcové, HK	–	5	6	6	–	–	2	**19**	**71**
38.	*Lucie Víšková*	OPEN GATE Říčany	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**69**
39.–41.	*Magdaléna Křížová*	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	–	5	5	6	6	–	7	**29**	**66**
39.–41.	*Ondřej Pátek*	G Ústavní, Praha	–	5	6	0	–	–	–	**11**	**66**
39.–41.	*Běla Poláčková*	ZŠ Mírová, Ústí nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**66**
42.	*Martin Rippl*	ZŠ a MŠ Osečná	–	5	–	–	–	–	1	**6**	**65**
43.	*Karel Hlaváček*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	2	**2**	**64**
44.	*Amaliya Jamgaryan*	ZŠ nám.Jiřího z Poděbrad, Praha	–	5	5	1	–	–	–	**11**	**63**
45.	*Přemek Man*	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**58**
46.–47.	*Helena Blažková*	ZŠ a MŠ Osečná	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**53**
46.–47.	*Jan Kuneš*	G, Žatec	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**53**
48.	*Juraj Štefina*	CZŠ sv. Gorazda, Prešov	–	3	6	5	–	–	–	**14**	**52**
49.–50.	*James Warren Honců*	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**51**
49.–50.	*Samuel Zubák*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**51**

Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

/ksvyfuk *@ksvyfuk*

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.