Úloha IV.5 ... Hustá hvězda

7 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček se svou lodí přistál na neznámé planetě daleko v hlubokém vesmíru. V rámci své expedice měl za úkol zjistit hustotu hvězdy, kolem které planeta po kružnici obíhá. Po dlouhé době strávené na planetě však Výfuček při svém bádání zjistil pouze úhlovou velikost hvězdy α a dobu trvání jednoho roku na planetě T. Naštěstí si však uvědomil, že toto mu k určení hustoty hvězdy stačí. Podaří se vám to také?

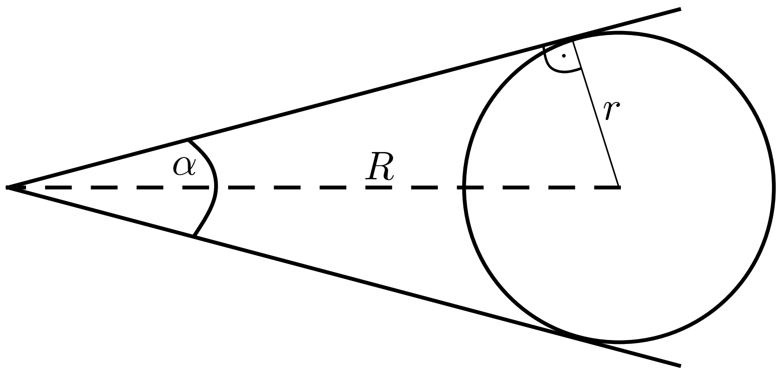
1. *Vyjádřete obecně hustotu hvězdy ρ pomocí její hmotnosti M, úhlové velikosti α a vzdálenosti hvězdy od planety R. Můžete využít předpokladu, že vzdálenost hvězdy od planety R je mnohem větší než poloměr hvězdy r.*
2. *Označme hmotnost planety m. Jaké síly na planetu při oběhu kolem hvězdy působí? Dokážete z nich vyjádřit vztah mezi veličinami R, M a T (a fyzikálními konstantami)?*
3. *Určete hustotu hvězdy ρ pouze pomocí naměřených veličin α a T (a fyzikálních konstant).*

1. Nejprve vyjádříme hustotu hvězdy přes její hmotnost M a její objem V, který spočítáme jako objem koule o poloměru r dle následujícího vzorce:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \,.$$

Pro hustotu, kterou určíme jako podíl hmotnosti a objemu hvězdy, tedy dostaneme vztah

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi r^3} \,. \tag{1}$$



Obr. 1: Pozorovaná úhlová velikost α hvězdy s poloměrem r ze vzdálenosti R.

Nyní bychom chtěli poloměr hvězdy r vyjádřit pomocí její úhlové velikosti. Z obrázku 1 vidíme, že platí vztah

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{R} \,, \tag{2}$$

kde r je poloměr hvězdy a R je vzdálenost hvězdy od planety.

Pro malé hodnoty úhlu α můžeme použít následující aproximaci[1]:

$$\sin x \approx x\,,$$

kde x je úhel v tzv. *radiánech*. Radián je přirozenější jednotka pro úhel než stupeň a mezi úhlem x vyjádřeným ve stupních a v radiánech platí převodní vztah:

$$x\text{ „v radiánech“} = \frac{2\pi}{360^\circ}x\text{ „ve stupních“}\,.$$

S využitím této aproximace můžeme upravit vztah (2) na

$$r = \frac{R\alpha}{2}\,.$$

Po dosazení tohoto vyjádření do vztahu (1) získáme pro hustotu hvězdy vyjádření pomocí hmotnosti hvězdy M, úhlové velikosti hvězdy α a vzdálenosti hvězdy od planety R:

$$\rho = \frac{6M}{\pi\alpha^3R^3}\,. \tag{3}$$

2. Na planetu při oběhu kolem hvězdy působí gravitační síla hvězdy a odstředivá síla. Gravitační síla, která působí mezi dvěma tělesy o hmotnostech m a M ve vzájemné vzdálenosti R, je dána následujícím vztahem:

$$F_\mathrm{g} = G\frac{mM}{R^2}\,,$$

kde $G \approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ je gravitační konstanta. Odstředivá síla působící na těleso pohybující se po kružnici o poloměru R rychlostí v je rovna

$$F_\mathrm{o} = \frac{v^2m}{R}\,.$$

Periodu oběhu planety T určíme jako podíl dráhy uražené planetou za jeden oběh kolem své hvězdy, tedy $s = 2\pi R$, a její rychlosti v.

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{2\pi R}{T} \tag{4}$$

Odstředivá síla působící na planetu je v rovnováze s gravitační silou (uvažujeme, že planeta obíhá po kružnici a její vzdálenost od hvězdy se nemění)

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{o}\,,$$

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{v^2m}{R}\,.$$

Z tohoto vztahu si opět vyjádříme rychlost planety v, která bude samozřejmě stejná jako ta, již jsme vyjádřili ve vztahu (4). Tímto získáme vztah mezi hmotností hvězdy M, vzdáleností hvězdy od planety R a časem oběhu planety T.

$$\sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \tag{5}$$

[1] Cca pro $\alpha \leq 9{,}98^\circ$ se radiánová hodnota úhlu liší od hodnoty $\sin\alpha$ o méně než $1\,\%$.

Poznamenejme, že jsme nyní vlastně odvodili 3. Keplerův zákon pro speciální případ pohybu po kružnici. Skutečně pokud naši rovnici umocníme a přeuspořádáme, dostaneme známou rovnici

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,.$$

3. Pro dosazení do vzorce pro hustotu (3) se nám bude hodit ze vztahu (5) vyjádřit vzdálenost hvězdy a planety R.

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

Teď již můžeme provést zmíněné dosazení do vztahu (3) a upravit získanou rovnost, abychom vyjádřili hustotu hvězdy ρ jen pomocí naměřené úhlové velikosti hvězdy α a doby oběhu planety kolem této hvězdy T.

$$\rho = \frac{6M}{\pi\alpha^3}\frac{4\pi^2}{GMT^2} = \frac{24\pi}{GT^2\alpha^3}$$

Vojtěch Kubrycht
kubrycht@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.