Úloha III.V ... Plavu, plaveš, plaveme

7 bodů; (chybí statistiky)

1. *Na Měsíci působí na pytel brambor tíhová síla* 81 N. *Jakou hmotnost má pytel a jaká je jeho tíha na Zemi?*

2. *Kus oceli na vodě neplove, ocelový tanker však ano. Mějme tanker o hmotnosti* 45 000 t. *Jaký minimální objem musí tanker mít, aby mohl plovat na vodě?*

3. *Výfuček si hrál v umyvadle s pirátskou lodí. Původně měl zlatý poklad položený v lodi, pak ho ale napadlo, že by piráti poklad lépe schovali, kdyby ho připevnili pod loď. Pokud Výfuček přiváže na loď poklad zespodu, co se stane s hladinou vody v umyvadle – klesne, stoupne, nebo zůstane stejná?*

4. *Kvádr korku o hustotě* $\rho = 520\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a rozměrech* $10\,\mathrm{cm} \times 10\,\mathrm{cm} \times 15\,\mathrm{cm}$ *položíme do akvária o rozměrech podstavy* $12\,\mathrm{cm} \times 12\,\mathrm{cm}$, *ve kterém je* 0,78 l *vody. Bude kvádr plovat? Odpověď odůvodněte.*

1. Pro výpočet hmotnosti pytle využijeme vztah

   $$m = \frac{F_\mathrm{M}}{g_\mathrm{M}}\,,$$

   kde F_M je tíhová síla působící na pytel na Měsíci ze zadání a $g_\mathrm{M} = 1{,}62\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je tíhové zrychlení na Měsíci.[1] Po dosazení získáme hmotnost pytle $m \doteq 50\,\mathrm{kg}$.

   Na Zemi máme tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, tedy upravíme první vztah pro výpočet tíhové síly

   $$F = mg\,.$$

   Víme, že tíha a tíhová síla mají stejnou velikost, liší se pouze působištěm. Po dosazení získáme tíhu pytle $F \doteq 491\,\mathrm{N}$.

2. Je nám známo, že tanker plove, tedy „vytlačí, kolik váží“. Potřebujeme proto vypočítat objem vody, který má stejnou hmotnost jako tanker. Voda má hustotu $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, hmotnost tankeru známe ze zadání. Dosadíme do vztahu pro objem a hustotu

   $$V = \frac{m}{\rho}$$

   a získáme minimální nutný objem lodi $V = 45\,000\,\mathrm{m^3}$.

3. Výfučkova loď s pokladem v lodi plove, tedy „vytlačí, kolik váží“. Po přivázání pokladu zespodu stále plove, tedy stále „vytlačí, kolik váží“. V obou případech loď vytlačí stejně vody, hladina v umyvadle tedy zůstane stejná.

[1] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Měsíc`

4. Aby kvádr ploval, musí vytlačit stejné množství vody, jako sám váží. Hmotnost kvádru získáme ze vztahu $m = \rho_\mathrm{k} V_\mathrm{k}$, kde objem kvádru V_k snadno spočteme ze zadaných rozměrů. Objem vody, který musí kvádr vytlačit, tedy je

$$V = \frac{m}{\rho_\mathrm{v}} = \frac{\rho_\mathrm{k} V_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v}}\,,$$

kde ρ_v je hustota vody. Pokud tento objem vydělíme plochou podstavy kvádru, získáme jeho tzv. hloubku ponoru, tedy do jaké výšky musí být pod vodou, aby ploval.

$$h = \frac{V}{S} = \frac{\rho_\mathrm{k} V_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{v} S} = 7{,}8\,\mathrm{cm}\,.$$

Poznámka: Celý tento postup lze zkrátit, víme-li, že z poměru hustot kapaliny a tělesa lze vypočítat, kolik procent tělesa musí být pod vodou. Jelikož tento postup ale není zmíněn ve Výfučtení, použili jsme „o něco delší“ metodu.

Vypočteme-li z plochy podstavy akvária a objemu vody v něm výšku hladiny, dojdeme k výsledku 5,4 cm. Mnohé by tedy mohlo napadnout, že kvádr plovat nemůže. Problém ale je, že nejsme v moři, ale v akváriu. Hladina se tedy může zvedat a objem kapaliny tělesem vytlačené je roven objemu ponořené části tělesa, tedy může být i větší než skutečný objem kapaliny v akváriu.

Kolem podstavy kvádru zbývá $S_\mathrm{o} = 12\,\mathrm{cm} \cdot 12\,\mathrm{cm} - 10\,\mathrm{cm} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 44\,\mathrm{cm}^2$ místa. Nalijeme-li do takto kvádrem „ukrojeného“ prostoru vodu z akvária, vystoupá do výšky

$$h_\mathrm{o} = \frac{0{,}78\,\mathrm{l}}{44\,\mathrm{cm}^2} \doteq 17{,}7\,\mathrm{cm}\,,$$

což je rozhodně víc než $h = 7{,}8\,\mathrm{cm}$, které kvádru stačí na plování. Co se stane s vodou, která by vystoupala nad čáru ponoru? Jednoduše zůstane pod kvádrem a ten na ní plove.

Poznamenejme, že jsme ani nemuseli počítat hloubku ponoru h, protože h_o je větší než výška korku – vidíme, že korek má menší hustotu než voda. Pokud je tedy v akváriu dost vody, bude korek plovat. Následně nám stačí ověřit, jestli nebude korek ležet na podložce (na což bychom ponor h obecně potřebovali). Výpočtem h_o zjistíme, že je větší než výška korku, a tedy již ponor h vůbec nemusíme počítat – automaticky víme, že by v akváriu ploval stejně velký korek s libovolnou hustotou menší než hustota vody.

Soňa Husáková
sona@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.