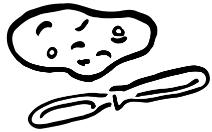
Úloha III.4 ... Loupání brambor

6 bodů; (chybí statistiky)



Jirkovi začaly pomalu docházet brambory. Už nezbyly žádné velké, ale jen několik malých. Všiml si, že mu loupání těchto malých brambor zabere déle. Spočítejte, jak dlouho mu potrvá oloupat půl kila malých brambor, jestliže mu půl kila velkých brambor zabralo přibližně 15 minut. Předpokládejte, že mají všechny brambory přibližně stejný tvar a že malé brambory jsou dvakrát menší (tj. mají dvakrát menší rozměry). Jirka loupe danou velikost povrchu vždy stejně rychle, nezávisle na velikosti brambor.

Pro účely snazšího výpočtu budeme uvažovat, že brambory jsou kulaté a všechny velké brambory mají stejný poloměr R a všechny malé mají poloměr $R/2$. Všechny naše úvahy a výpočty lze ovšem zobecnit na tělesa jakéhokoli tvaru (viz komentář na konci řešení). Naše řešení tedy bude stále plně platné, výsledek platí obecně. Pro jednu bramboru o poloměru R platí následující vztahy pro povrch a objem:

$$S_0 = 4\pi R^2\,,$$
$$V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Kombinací těchto vztahů získáme rovnost

$$V_0 = \frac{R}{3} S_0\,.$$

Rovnost jsme odvodili pro libovolnou bramboru, platí tedy bez výjimky pro všechny. Když sečteme objemy všech brambor, tak dostaneme stejnou rovnost pro jejich celkový objem V a celkovou plochu S (zde využíváme předpoklad, že mají všechny stejný poloměr)

$$V = \frac{R}{3} S\,.$$

Předpokládáme, že velké i malé brambory mají stejnou hustotu, a tedy 0,5 kg velkých brambor bude mít stejný objem jako 0,5 kg malých brambor. Z toho dostáváme

$$V = \frac{R}{3} S_\mathrm{v} = \frac{R/2}{3} S_\mathrm{m} = \frac{R}{6} S_\mathrm{m}\,,$$

neboli

$$S_\mathrm{m} = 2 S_\mathrm{v}\,.$$

Protože Jirka loupe daný povrch stejně rychle nezávisle na velikosti brambor, bude mu loupání malých brambor trvat dvakrát déle než velkých brambor, tedy 30 minut.

Poznámky k obecnému řešení

Uvažujme těleso libovolného tvaru. Jeho objem a povrch mají zajímavou obecnou vlastnost, že povrch je přímo úměrný druhé mocnině jeho „rozměrů“ a objem přímo úměrný třetí mocnině. Pokud tedy zvětšíme rozměry 2krát, zvětší se povrch 4krát a objem 8krát.

Tuto vlastnost můžeme snadno ověřit u těles, pro která známe vzorečky na výpočet objemu. Například pro krychli platí $S = 6a^2$, $V = a^3$, pro kouli pak $S = 4\pi r^2$, $V = 4\pi r^3/3$, kde dosazením $2a$, $2r$ místo a, r můžeme ověřit zmíněnou vlastnost.

Co ovšem myslíme slovem rozměr pro tělesa komplikovaného tvaru, jako například brambora? A co když neumíme jejich povrch a objem spočítat pomocí vzorečku? Pomocí pokročilé matematiky lze ukázat, že nám to vůbec nevadí. Uvažujme libovolnou *množinu* těles (například pytel brambor) neznámých tvarů. Pokud nyní všem zdvojnásobíme nějaký jejich rozměr tak, že zachováme tvary (tím vlastně zdvojnásobíme každý možný rozměr), tak bude platit, že se celkový objem zvětší 8krát a plocha 4krát.

Pak už postupujeme sérií jednoduchých úvah. Daný počet malých brambor má 4krát menší plochu a 8krát menší objem. Aby jich tedy bylo co do hmotnosti stejně jako velkých, musí jich být 8krát víc co do počtu a tedy bude jejich celková plocha 2krát větší.

David Chudožilov
chudozilov@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.