Úloha I.V ... Ideální plyn

7 bodů; (chybí statistiky)

1. *Viktor koupil na příští tábor Výfuku horkovzdušný balón. Hmotnost prázdného balónu je $m = 1\,000\,\mathrm{kg}$ a vejde se do něj vzduch o objemu $V = 3\,000\,\mathrm{m^3}$.*

   Na jakou teplotu musí ohřát vzduch uvnitř, aby se balón vznesl nad zem, jestliže má okolní vzduch teplotu $20\,^\circ\mathrm{C}$? Potřebné fyzikální vlastnosti vzduchu si dohledejte.

2. *Uvažujme následující cyklus ideálního plynu. Na začátku má objem V, teplotu T a tlak p, přičemž jej nejdříve necháme izotermicky expandovat na objem $3V$. Poté jej budeme izochoricky zahřívat, následně jej izotermicky stlačíme na objem $2V$ a poté budeme izobaricky stlačovat do původního stavu. Na jaké teplotě musí probíhat druhá izoterma? Jaká je hodnota tlaku před izotermickým stlačováním? Celý cyklus zakreslete do p-V diagramu.*

3. *Jak bylo zmíněno ve Výfučtení, je vnitřní energie součtem kinetických energií všech částic v plynu. Odhadněte pomocí tohoto tvrzení průměrnou rychlost jednotlivých částic plynného vodíku a dusíku za teploty $25\,^\circ\mathrm{C}$ a porovnejte ji s rychlostmi předmětů, které se běžně pohybují okolo vás. Pro oba plyny určete, kolik částic se nachází v objemu $1\,\ell$ při této teplotě a tlaku $1\,\mathrm{bar}$. Z předchozích výpočtů odhadněte (nepokoušejte se to spočítat přesně, k určení některých číselných koeficientů v přesném výsledku jsou potřeba velmi pokročilé znalosti), kolik částic okolního vzduchu vám za sekundu narazí do oka.*

Podúloha 1

Aby se balón vznesl nad zem, musí na něj směrem nahoru působit síla, která bude větší než síla tíhová. Touto silou bude vztlaková síla, kterou bude okolní vzduch působit na balón. Její velikost je

$$F_{\mathrm{vz}} = V\rho_{\mathrm{v}}g\,,$$

kde ρ_{v} je hustota vzduchu mimo balón a g je tíhové zrychlení. Směrem k zemi působí tíhová síla o velikosti

$$F_{\mathrm{G}} = mg + V\rho_{\mathrm{u}}g\,,$$

kde jsme nezapomněli započítat tíhovou sílu vzduchu uvnitř balónu s hustotou ρ_{u}. Aby se balón mohl vznést, musí platit minimálně rovnost obou sil, ze které dokážeme vyjádřit potřebnou hustotu vzduchu uvnitř jako

$$mg + V\rho_{\mathrm{u}}g = V\rho_{\mathrm{v}}g \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathrm{u}} = \rho_{\mathrm{v}} - \frac{m}{V}\,.$$

Jak souvisí hustota s tlakem a teplotou jsme si ukázali ve Výfučtení, potřebný vztah je

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_{\mathrm{vzduch}}}\,.$$

Uvnitř i vně balónu musí být stejný tlak, aby nedošlo k nějakým výrazným přesunům plynů. Jeho hodnota bude stejná jako atmosférický tlak, protože se nacházíme blízko země. Teplotu vzduchu mimo balón označíme jako T_v, teplotu uvnitř jako T_u. Dosazením za ρ_u a ρ_v z předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{p_\mathrm{a} M_\mathrm{vzduch}}{RT_\mathrm{u}} = \frac{p_\mathrm{a} M_\mathrm{vzduch}}{RT_\mathrm{v}} - \frac{m}{V}\,,$$

odkud už vyjádříme potřebnou teplotu vzduchu uvnitř jako

$$T_\mathrm{u} = \frac{p_\mathrm{a} M_\mathrm{vzduch} T_\mathrm{v} V}{p_\mathrm{a} M_\mathrm{vzduch} V - mRT_\mathrm{v}}\,.$$

Pro číselný výpočet potřebujeme mimo hodnoty v zadání znát ještě molární hmotnost vzduchu M_vzduch, atmosferický tlak p_a a hodnotu molární plynové konstanty R. Všechny tyto hodnoty najdeme ve Výfučtení; $M_\mathrm{vzduch} = 28{,}96\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, $p_\mathrm{a} \approx 100\,000\mathrm{Pa}$ a $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$. Nyní již stačí jen dosadit[1] a dostáváme výsledek, že vzduch v balónu musí mít teplotu přibližně $T_\mathrm{u} \doteq 407\,\mathrm{K} \doteq 134\,^\circ\mathrm{C}$.

Podúloha 2

Kruhový děj s plynem je vyznačen čtyřmi body, mezi kterými plyn přechází pomocí jednotlivých dějů. Označme je popořadě jako A, B, C a D.

Druhá izoterma končí v bodě D, kde je tlak $p_D = p = p_A$ (do původního stavu A se dostaneme izobaricky) a objem $V_D = 2V$. Ze stavové rovnice ve tvaru

$$p_\mathrm{D} V_\mathrm{D} = nRT_\mathrm{D}$$

si můžeme vyjádřit teplotu v bodě D (teplotu, na níž probíhá druhá izoterma) a dosazením dostáváme

$$T_\mathrm{D} = \frac{p_\mathrm{D} V_\mathrm{D}}{nR} = \frac{p2V}{nR} = 2\frac{pV}{nR}\,.$$

Zlomek pV/nR však, jak snadno zjistíme ze stavové rovnice, odpovídá teplotě v bodě A, tedy teplotě T. Celkem tedy získáváme výsledek

$$T_\mathrm{D} = 2T\,.$$

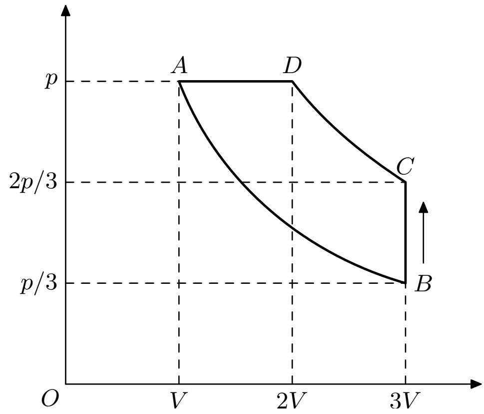
Tlak v bodě C určíme z hodnoty teploty a objemu jako

$$p_\mathrm{C} = \frac{nRT_\mathrm{C}}{V_\mathrm{C}} = \frac{nR2T}{3V} = \frac{2}{3}p\,.$$

Graf cyklu vidíte na obrázku 1. Poznamenejme, že pro sestrojení grafu bylo potřeba dopočítat tlak v bodě B. Z bodu A do B se dostaneme izotermicky, dostaneme tedy

$$p_\mathrm{A} V_\mathrm{A} = p_\mathrm{B} V_\mathrm{B} \implies p_\mathrm{B} = \frac{p}{3}\,.$$

[1] Samozřejmě nesmíme zapomenout na to, že teplotu musíme dosazovat v kelvinech a molární hmotnost v kilogramech na mol.



Obr. 1: Hledaný p-V digram

Podúloha 3

Ve Výfučtení jsme uvedli tvar pro vnitřní energii ideálního plynu. V zadání se ptáme na rychlosti částic. Z Výfučtení víme, že dvouatomový plyn má pět stupňů volnosti, z nichž tři odpovídají posuvnému pohybu a dva otáčení. Celková vnitřní energie plynu je tedy

$$U = \frac{5}{2}nRT\,.$$

My však chceme vypočítat rychlost částic, zajímá nás tedy jen energie související s posuvným pohybem (tedy energie, která není spotřebována na otáčení), a tak budeme počítat s vnitřní energií posuvného pohybu U_p

$$U_\mathrm{p} = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}\frac{N}{N_\mathrm{A}}RT\,,$$

kde jsme za látkové množství dosadili z definičního vztahu počet částic dělený Avogardovou konstantou. Vnitřní energie jedné částice takto bude rovna její kinetické energii

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2}\frac{RT}{N_\mathrm{A}} = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

odkud najdeme rychlost částice jako[2]

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{N_\mathrm{A}m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_\mathrm{m}}}\,.$$

Z tabulek můžeme vyčíst, že molární hmotnost pro molekulu vodíku je $M_{\mathrm{H}_2} = 2{,}016\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, zatímco pro dusík to je $M_{\mathrm{N}_2} = 28{,}02\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Dosazením následujících hodnot do odvozeného vztahu za $T = 298{,}15\,\mathrm{K}$ a $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ dostaneme rychlosti $v_{\mathrm{H}_2} \doteq 1\,920\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_{\mathrm{N}_2} \doteq$ $\doteq 520\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

[2]Poznamenejme, že vypočítaná rychlost není přesně průměrná rychlost, jedná se o tzv. *střední kvadratickou rychlost*.

Je vidět, že molekuly vodíku se pohybují násobně rychleji oproti dusíku. Zároveň se jedná o rychlosti, se kterými se v běžném životě moc nesetkáme. Z běžných dopravních prostředků se jim blíží jenom letadla, která létají rychlostí řádově $250\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pokud bychom cestovali rychlostí vodíkových molekul mezi Brnem a Prahou, trvala by tato cesta něco pod dvě minuty! Protože se však molekuly pohybují náhodně všemi směry, nepozorujeme žádné výrazné přesuny vzduchu kolem nás. Také je potřeba zmínit, že touto rychlostí se nepohybují všechny molekuly, ale že se jedná jen o orientační odhad v jistém smyslu průměrné rychlosti.

Ve druhém úkolu první části máme určit počet molekul v objemu jednoho litru za tlaku 1 bar. Jednoduše dosadíme do stavové rovnice, kterou poté celou přenásobíme Avogadrovou konstantou N_A a dostaneme počet částic jako

$$N = N_\mathrm{A} n = N_\mathrm{A} \frac{pV}{RT} \doteq 2{,}4 \cdot 10^{22}\,.$$

Počet molekul v jednom litru za standardních podmínek je tedy nepředstavitelně vysoký a nezávisí na druhu plynu.

Pro určení počtu částic, které nám narazí za čas $t = 1\,\mathrm{s}$ do oka, vyjdeme z hodnoty atmosférického tlaku $p_\mathrm{a} = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Když jej vynásobíme plochou oka S, dostaneme působící sílu $F = pS$. Tato síla je také rovna změně hybnosti částic, které do oka narazí za jednotku času. Hybnost jedné částice označme $\mathbf{p}$. Jedná se o vektor, nás však bude zajímat pouze složka kolmá k povrchu oka $p_\perp$, která má hodnotu $mv_\perp$. Změna hybnosti částice při nárazu je $2mv_\perp$, protože částice musí zastavit a poté získat zpět původní rychlost.

Vložíme-li předchozí úvahy do rovnice, dostaneme

$$F = pS = N\frac{2mv_\perp}{t} \quad\Rightarrow\quad N = \frac{pS\ t}{2mv_\perp} = N_A \frac{pS\ t}{2M_\mathrm{vzduch} v_\perp}\,,$$

kde N je hledaný počet částic, které za čas t narazí do našeho oka, a kde jsme v druhém kroku vyjádřili hmotnost jedné částice vzduchu pomocí jeho molární hmotnosti a Avogadrovy konstanty.

Ještě odhadneme $v_\perp = v/3$, kde rychlost $v \doteq 510\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ vypočítáme stejně jako pro vodík a dusík v předchozí části, akorát dosadíme molární hmotnost vzduchu z Výfučtení. Faktor $1/3$ jsme odhadli z toho, že ve 3D systému mohou rychlosti částic mířit do os x, y a z a v průměru pouze třetina z nich míří pouze např. do osy z. Při přesném odvození bychom zjistili, že ani faktor $1/3$ není správný, ale protože se jedná pouze o odhad, budeme dále počítat s ním. Pokud jste na něj zapomněli úplně, je možné úlohu bez ztráty bodu dopočítat i bez něj.

Plochu oka můžeme odhadnout například pomocí pravítka. Oko má každý člověk jinak velké, také záleží na tom, jak moc je otevřeme atd. Když tedy oko hrubě aproximujeme obdélníkem, máme šířku přibližně 2,5 cm a výšku 1,5 cm, odkud plocha $\approx 4\,\mathrm{cm^2}$. Po dosazení dostáváme

$$N \doteq 2{,}5 \cdot 10^{24}\,.$$

Jaroslav Herman
`herman@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.